6.3.0 泰勒公式:引言

- 逼近思想（微分及其局限）
- 什么是泰勒多项式?
- 什么是泰勒公式?
- 什么是麦克劳林公式?

6.3.1 泰勒公式：泰勒多项式

定义： 设 f 在 x_0 有直到 n 阶的导数，称

$$T_n(f;x)=T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

为 f 在 x_0 处的 n 次泰勒多项式.

问： 1. $T_n(x)$ 有什么特点?

2. $T_n(x)$ 与 f 有什么关系?

6.3.2 泰勒公式：佩亚诺型余项(1)

如何刻画 $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$呢？

定理：设 f 在 x_0 有直到 n 阶的导数，则

$$f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n) \qquad (x\to x_0)$$

且任何不与 $T_n(x)$ 相等的 n 次多项式都不能取代 $T_n(x)$ 使上式成立.

6.3.2 泰勒公式：佩亚诺型余项（2）

注:

1. 若 $f(x)$ 在 x_0 附近满足

$$f(x)=p_n(x)+o((x-x_0)^n) \qquad (x\to x_0)$$

则 $p_n(x)$ 未必就是 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒多项式 $T_n(x)$.

例：$f(x)=x^{n+1}D(x), n\in N_+$

2. 满足 $f(x)=p_n(x)+o((x-x_0)^n) \qquad (x\to x_0)$ 的多项式 $p_n(x)$ 是唯一的.

6.3.3 泰勒公式：拉格朗日型余项

定理： 设 f 在 $[a,b]$上存在直到 n阶的连续导数, 在 (a,b) 内存在 $n+1$ 阶导数, 则对 $\forall\ x, x_0 \in [a,b]$, 存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

注:上式中的余项称为拉格朗日型余项.

6.3.4 泰勒公式：示例

例 $f(x)=e^x, x_0=0.$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\ (x \to 0).$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

(ξ介于 0 与 x 之间)

6.3.5 泰勒公式:应用于近似计算

例 $f(x) = e^x, x_0 = 0.$

$$e^x \approx T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\left| e^x - T_n(x) \right| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right|.$$

现令 $x = 1,$

$$\left| e - T_n(1) \right| = \left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \right| < \frac{3}{(n+1)!}.$$

6.4.0 极值与最值:引言

- 什么是极大（小）值?
- 什么是最大（小）值?
- 可导函数极值的充分条件?

6.4.1 极值与最值:极值第一充分条件

定理 设 f 在点 x_0 连续，在 $\mathrm{U}^{\circ}(x_0;\ \delta)$ 内可导.

$$\left.\begin{array}{ll} f'(x)\le 0, & x_0-\delta<x<x_0 \\ f'(x)\ge 0, & x_0<x<x_0+\delta \end{array}\right\}\Rightarrow f(x_0)\text{极小}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} f'(x)\ge 0, & x_0-\delta<x<x_0 \\ f'(x)\le 0, & x_0<x<x_0+\delta \end{array}\right\}\Rightarrow f(x_0)\text{极大}.$$

6.4.2 极值与最值:极值第二充分条件

定理 设 f 在点 x_0 的某邻域 $\mathrm{U}(x_0;\ \delta)$ 内可导，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则

$$f''(x_0)<0 \Rightarrow f(x_0)\text{极大}.$$

$$f''(x_0)>0 \Rightarrow f(x_0)\text{极小}.$$

6.4.3 极值与最值:极值第三充分条件

定理 设 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0;\ \delta)$ 内存在直到 $n-1$ 阶的导数，且 $f^{(k)}(x_0)=0$,（$k=0, 1, 2, \cdots n-1$）, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$，则

$$n\text{偶}\Rightarrow\begin{cases} f(x_0)\text{极大值}, & \text{当 } f^{(n)}(x_0)<0 \\ f(x_0)\text{极小值}, & \text{当 } f^{(n)}(x_0)>0 \end{cases}$$

$$n\text{奇}\Rightarrow f(x_0)\text{非极值}.$$

6.4.4 极值与最值:示例

例1. 求 $f(x)=2\cos x+\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$ 的极值.

例2. 求 $f(x)=x^{4}(x-1)^{3}$ 的极值.

例3. 求 $f(x)=\left|x(x^{2}-1)\right|$ 的极值.

6.4.5 极值与最值:最值求法

定理 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1, x_2, \cdots x_m$ 为 f 的所有稳定点，$y_1, y_2, \cdots y_n$ 为 f 的所有不可导点，

$$f_{\max} = \max\{f(a), f(b), f(x_1), \cdots f(x_m), f(y_1), \cdots f(y_n)\};$$

$$f_{\min} = \min\{f(a), f(b), f(x_1), \cdots f(x_m), f(y_1), \cdots f(y_n)\}.$$

6.5.0 凸性与拐点:引言

- 什么是凸函数?
- 如何判定凸函数?
- 什么是詹森不等式?
- 什么是拐点?

6.5.1 凸性与拐点:凸的定义(1)

定义 设 f 在区间I上有定义，若对任意 $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$, 任意$\lambda \in (0, 1)$, 总有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

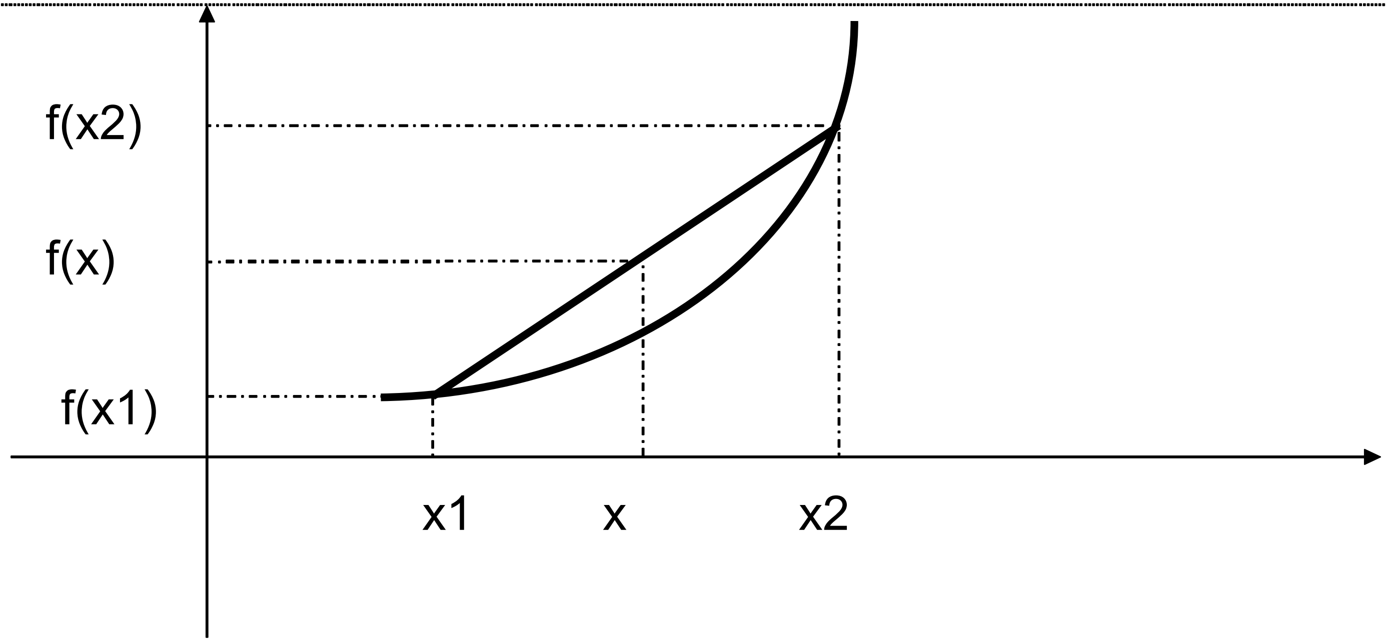
则称 f为 I 上的凸函数.

若总有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

则称 f为 I 上的凹函数.

6.5.1 凸性与拐点:凸的定义(2)



注

1. $x - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1)$; $x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1)$;

2. 当"$<$"成立时，称为严格凸.

3. 当 f 凸时，$-f$为凹.

6.5.1 凸性与拐点:凸的判定（1）

定理 f 为 I 上的凸函数的充分必要条件是：对 I 上的任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$,总有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

或

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

6.5.2 凸性与拐点:凸的判定（2）

定理 f 为 I 上的可导函数，则下述等价：

1. f 为 I 上的凸函数；
2. f' 为 I 上的增函数；
3. 对 I 上的任意两点 x_1, x_2, 有

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

（凸的几何特征）

问：第三条的结论与 x_1, x_2 的大小有关吗？

6.5.3 凸性与拐点:凸的判定（3）

定理 f 为 I 上的二阶可导函数，则 f 为 I 上的凸函数的充要条件为

$$f''(x) \geq 0, \quad x \in I$$

例1. 讨论函数 $f = \arctan x$ 的凸性.

例2. 若函数 f 为定义在开区间 (a,b) 内的可导的凸函数,则 $x_0 \in (a,b)$ 为 f 的极值点的充要条件为 $f'(x_0) = 0$.

6.5.4 凸性与拐点:Jensen不等式

定理 f 为 $[a,b]$ 上的凸函数, 则对任意

$x_i \in [a,b], \lambda_i > 0\ (i=1,2,\cdots,n), \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, 有

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

特别

$$f(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}) \le \frac{1}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_n)).$$

6.5.4 凸性与拐点:Jensen不等式

例. 证明不等式:

$$(ab)^{\frac{a+b}{2}} \le a^a b^b$$

其中, a,b 均为正数.

推广 :

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}} \le a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n}$$

其中, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为正数..

6.5.4 凸性与拐点：拐点(1)

定义 设曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处有穿过曲线的切线.且在切点近旁,曲线在切线的两侧分别是严格凸和严格凹的,这时称点$(x_0,f(x_0))$为为曲线$y=f(x)$的拐点.

例:

1. 求 $y=x^3$ 的拐点.

2. 求 $y=\sin x$的拐点.

6.5.4 凸性与拐点:拐点(2)

定理 若 $f''(x_0)$ 存在,则$(x_0, f(x_0))$为曲线 $y=f(x)$ 的拐点的必要条件为 $f''(x_0)=0$.

定理 若 $f'(x_0)$ 存在,在 $U^\circ(x_0)$内二阶可导.若在$U^\circ_+(x_0)$ 和 $U^\circ_-(x_0)$上$f''(x)$ 的符号相反，则 $(x_0, f(x_0))$ 为$y=f(x)$ 的拐点.

6.5.4 凸性与拐点:示例（1）

例 1. 若 f 为定义在 (a,b) 内的可导凸函数，则 $x_0 \in (a,b)$ 为 f 的极小值的充要条件是 $f'(x_0)=0$.

例 2. 证明 $(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \le a^a b^b c^c, a,b,c \in R^+$.

例 3. 若 f 为定义在 I 内的凸函数，则 f 在 I 内任一点都存在左,右导数.

6.6 本章题选讲（1）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{x}-\ln(1+x)}{x^{2}}$.

2. 设 $h>0$，函数 f 在 $U(a;h)$ 内具有 $n+2$ 阶连续导数，且 $f^{(n+2)}(a)\neq 0$, f 在 $U(a;h)$ 内的泰勒公式为 $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}h^{n}+\dfrac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$,

求证：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+2}$.

6.6 本章习题选讲（2）

3. 设 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的二阶可导函数. 若 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,则存在 $\xi \in (-\infty,+\infty)$,使 $f''(\xi)=0$.

4. 若 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界且凸，则 f 为常值函数.

7.0 实数完备性:引言

- 什么是完备性?
- 六个基本定理:

  确界原理、单调有界定理、柯西准则、区间套定理、聚点定理、有限覆盖定理

- 应用

7.1.1 实数完备性：区间套定理(1)

定理 设闭区间$\{[a_n, b_n]\}$列具有下列性质：

(1) $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1, 2, \cdots;$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0,$

则存在唯一的一点$\xi \in R$，使$\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots.$

推论 若ξ是区间套定理所确定的点，则对任给的$\varepsilon > 0$，存在$N > 0$，使得当$n > N$时有

$$[a_n, b_n] \subset U(\xi; \varepsilon).$$

7.1.1 实数完备性:区间套定理(2)

注:

1. 区间的二分法.

2.对于开区间套，定理不成立.

$$\{(0,\frac{1}{n})\},\ \bigcap_{n=1}^{\infty}(0,\frac{1}{n})=\varnothing$$

应用:

1. 柯西收敛准则的充分性的证明.

7.1.2 实数完备性:聚点定理(1)

聚点:设 S 为数轴上的点集，ξ 为定点.

1. 若ξ的任何邻域内都含有 S 中无穷多个点,则称ξ为点集 S 的一个聚点.

2.若 ξ 的任何 ε 邻域内都含有 S 中异于ξ 的点, 即 $U^{\circ}(\xi;\varepsilon)\cap S\neq\varnothing$,则称$\xi$ 为点 集 S的一个聚点.

3.若存在各项互异的收敛数列$\{x_n\}\subset S$,则其极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$ 称为 S 的一个聚点.

7.1.2 实数完备性:聚点定理(2)

例:

$$S=\{\frac{1}{n}\};\ S=\{(-1)^n+\frac{1}{n}\};\ S=\{r:r\in(a,b)\bigcap Q\}.$$

聚点定理:

R中的有界无限点集至少有一个聚点.

致密性定理:

有界数列必含有收敛的子列.

7.1.3 实数完备性:有限覆盖定理

开覆盖：

设 S 为数轴上的点集，H为开区间的集合.若 S 中任何一点都含在 H 中至少一个开区间内,则称 H为 S 的一个开覆盖,或称 H 覆盖 S.

有限覆盖定理:

设 H为闭区间$[a,b]$的一个开覆盖,则从 H 中可选出有限个开区间来覆盖$[a,b]$.

7.2.1 闭区间上连续函数性质的证明

设 $f \in C[a,b]$，则

1. $\exists M > 0, \text{s.t.} \left| f(x) \right| \le M, x \in [a,b].$

2. $\exists x_1, x_2 \in [a,b], \text{s.t.} f(x_1) = \max, f(x_2) = \min.$

3. $f(a) \ne f(b), \mu = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b), \lambda \in (0,1)$

$\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b), \text{s.t.} f(x_0) = \mu.$

4. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{s.t.} x_1, x_2 \in [a,b] : \left| x_1 - x_2 \right| < \delta$

$\Rightarrow \left| f(x_1) - f(x_2) \right| < \varepsilon.$

7.3 实数连续性的等价表现形式

- 单调有界数列必有极限;
- 区间套定理;
- 确界原理;
- 有限覆盖定理;
- 聚点定理;
- 致密性定理;
- 柯西准则

8.0 不定积分:引言

- 不定积分----求导的逆运算
- 不定积分的计算：

  换元法、分部积分法

8.1 不定积分:基本概念(1)

问题： $f(x)$ 于 I 有定义，求 $F(x)$，使

$$F'(x)=f(x)\text{，}\ x\in I$$

（此时，称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数）

例：$(\qquad\qquad)'=\cos x;$

$$(\qquad\qquad)'=\frac{1}{1+x^2}$$

需要解决:

$F(x)$ 的存在性、唯一性、表达.

8.1 不定积分:基本概念(2)

定理: $f(x)$ 于 I 有定义，则

1. 若 $f(x)$ 于 I 连续，则 $f(x)$ 于 I 存在原函数;

2. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 于 I 上的一个原函数，则 $F(x)+C$也是 $f(x)$ 于 I 上的原函数;

3. $f(x)$ 于 I 上的任意两个原函数之间，相差一常数.

8.1 不定积分:基本概念(3)

定义： $f(x)$ 于 I 上的原函数的全体记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

并称之为$f(x)$ 于 I 上的不定积分.

性质：

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x);$$

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C;$$

$$\int [af(x) + bg(x)]\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

8.1 不定积分:基本概念(4)

例: 证明 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$

求 $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

8.2.1 换元积分法：(1)

1. $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\,\mathrm{d}[\varphi(x)]$

$$\overset{u=\varphi(x)}{=} \int f(u)\mathrm{d}u \overset{if}{=} F(u)+C = F[\varphi(x)]+C.$$

例

$$\int x\sin(x^2+1)\mathrm{d}x$$

$$\int \csc x\mathrm{d}x$$

8.2.1 换元积分法：(2)

2. $\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{x=\varphi(t)}{=} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

$\overset{if}{=} F(t)+C = F[\varphi^{-1}(x)]+C$

例

$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}$

8.2.2 分部积分法

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\Rightarrow fg' = (fg)' - f'g$$

$$\Rightarrow \int fg'\mathrm{d}x = \int (fg)'\mathrm{d}x - \int f'g\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int f\mathrm{d}g = fg - \int g\mathrm{d}f$$

例 $\int x\sin x\mathrm{d}x, \int \ln x\mathrm{d}x, \int x\arctan x\mathrm{d}x$

$\int e^x\cos x\mathrm{d}x$

8.3 有理函数的不定积分

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots b_m}$$

$$(a_0\neq 0, b_0\neq 0, m>n)$$

希望 $R(x)=\sum$ 部分分式

例 对 $R(x)=\dfrac{2x^4-x^3+4x^2+9x-10}{x^5+x^4-5x^3-2x^2+4x-8}$

作部分分式分解

8.3.1 两种基本类型有理函数的不定定积分（1）

1. $$\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = \begin{cases} A\ln|x-a| + C, & n=1 \\ \dfrac{A}{1-n}\cdot\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} + C, & n>1 \end{cases}$$

2. $$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\mathrm{d}x, (p^2-4q<0)$$

8.3.1 两种基本类型有理函数的不定定积分（2）

例

1. $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

8.3.2 可化为有理函数的不定积分（1）

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

令 $t=\tan\frac{x}{2}$

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

8.3.2 可化为有理函数的不定积分（2）

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x \quad (ad-bc\neq 0)$$

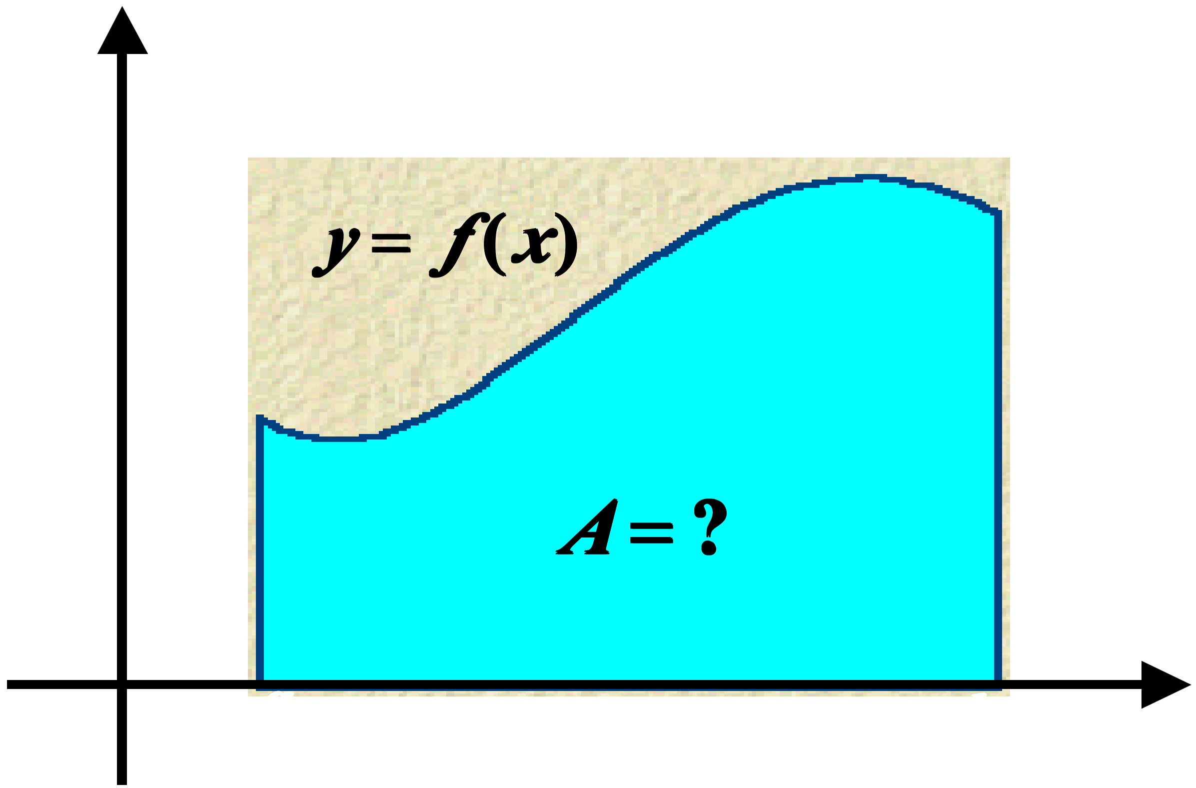
$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$$

9.0 定积分:引言

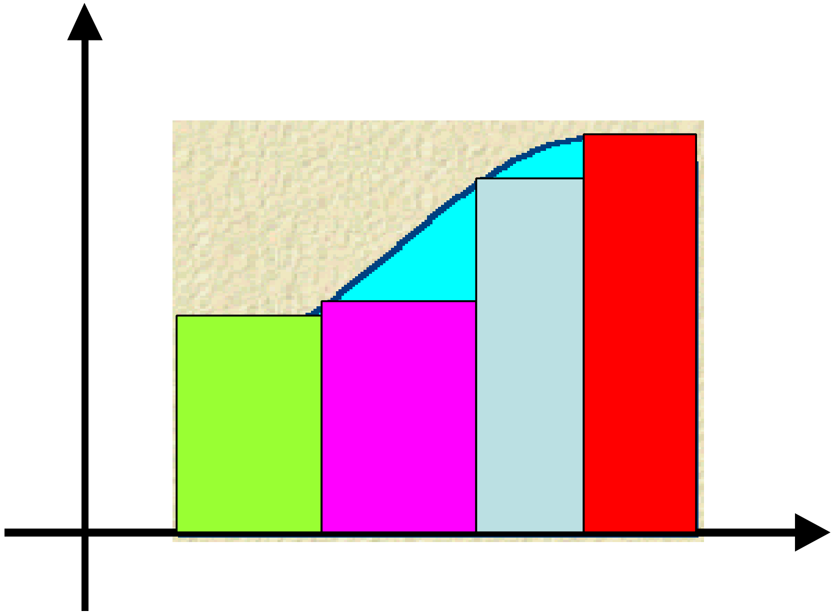
- 引人入胜的一章
- 定积分是什么
- 可积函数类
- 性质与计算
- 应用

9.1 定积分:基本概念(1)

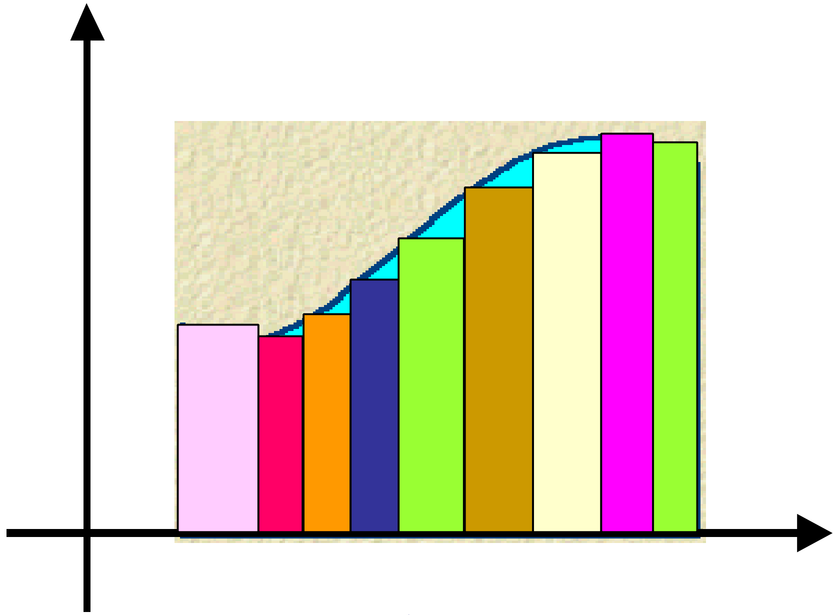
背景：求曲边梯形的面积:



9.1 定积分:基本概念(2)



（四个小矩形）

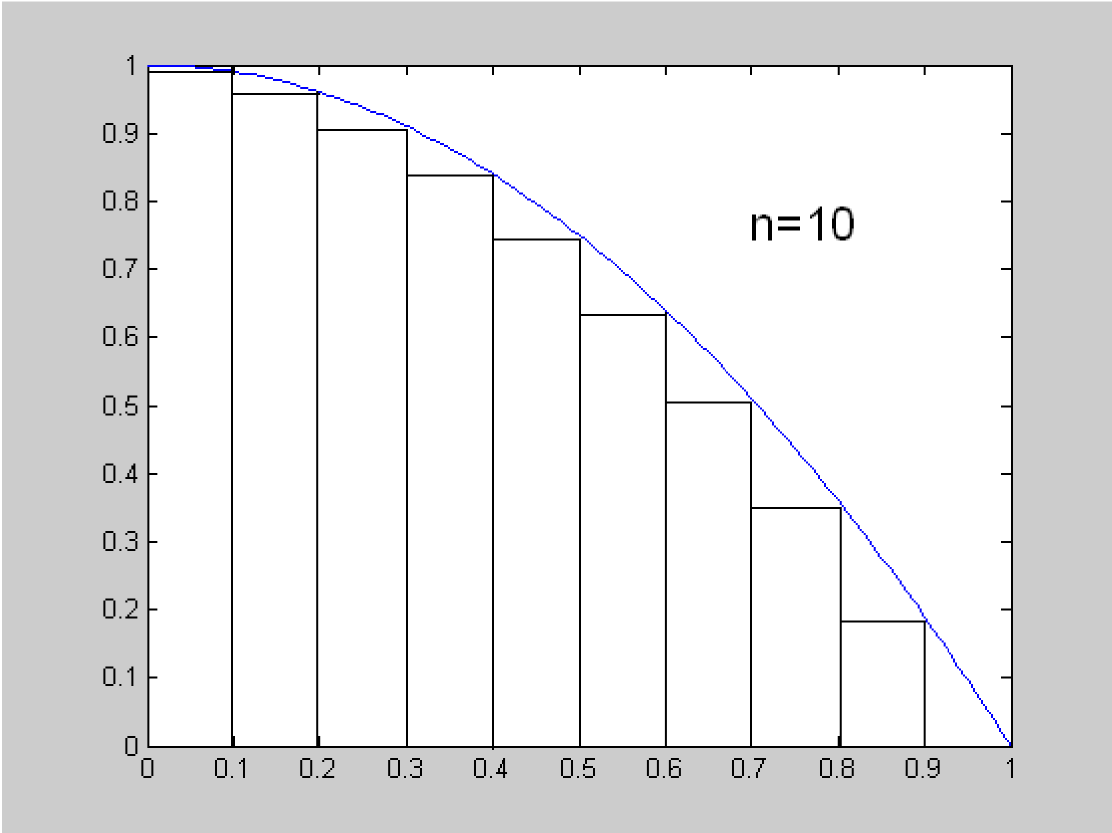


（九个小矩形）

小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积

9.1 定积分:基本概念(3)

例 求曲线段 $y = 1 - x^2, x \in [0,1]$ 与坐标轴所围区域的面积 S.



9.1 定积分:基本概念(4)

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}[1-(\frac{k}{n})^2]$$

$$= \frac{1}{n}[n - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2]$$

$$= 1 - \frac{1}{6n^3} n(n+1)(2n+1)$$

$$\to \frac{2}{3} \quad (n \to \infty)$$

9.1 定积分:基本概念(5)

$$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

$$[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\|T\| := \max \Delta x_i$$

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \cdots, n$$

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$——**黎曼和**

9.1 定积分:基本概念(6)

定义：如果 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I$, 则称 $f(x)$于 $[a,b]$可积, 并称 I 为 f 在$[a,b]$上的定积分.

记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

数学描述：$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \text{s.t. } \forall T: \|T\| < \delta,$

$\forall\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 有$\left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$

9.1 定积分:基本概念(7)

若干简单性质：设$f(x), g(x)$于$[a,b]$可积

1. $f(x)$非负$\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$;

2. $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

3. $\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, c \in R$

9.1 定积分:基本概念(8)

例

1. 证明狄利克雷函数于 $[0,1]$ 上不可积.

2. 证明 $\int_a^b c\mathrm{d}x = c(b-a)$.

3. $\int_a^b x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

9.2 定积分:N—L公式(1)

引理：设 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 存在原函数 $F(x)$，即 $F'(x)=f(x)$

定理：设 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 于 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

9.2 定积分:N—L公式(2)

例：

$$1.\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}(4-x^2)$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2$$

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

9.3.1 定积分:可积必要条件

定理 可积一定有界, 反之不然.

9.3.2 定积分:可积充要条件(1)

定义：设 T：$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),$$

则称 $S(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$，$s(T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

分别为 f 关于分割 T 的***上和与下和***.并称

$\omega_{\mathrm{i}} = M_i - m_i$ 为 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的***振幅***.

注：$\omega_{\mathrm{i}} = \sup\limits_{x_1, x_2\in[x_{i-1},x_i]} \left|f(x_1) - f(x_2)\right|$

9.3.2 定积分:可积充要条件(2)

定理: f 于 $[a,b]$ 可积 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 分割 T s.t. $S(T) - s(T) < \varepsilon$.

定理: f 于 $[a,b]$ 可积 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 分割 T s.t. $\sum_{i=1}^{n} \omega_{\mathrm{i}} \Delta x_i < \varepsilon$.

9.3.3 定积分:可积函数类(1)

定理: f 于 $[a,b]$ 连续 $\Rightarrow$ f 于 $[a,b]$ 可积.

定理: f 于 $[a,b]$ 有界且只有有限个间断点 $\Rightarrow$ f 于 $[a,b]$ 可积.

定理: f 于 $[a,b]$ 单调 $\Rightarrow$ f 于 $[a,b]$ 可积.

9.3.3 定积分:可积函数类（2）

例1：证明下述函数于区间 $[0,1]$ 上可积.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}, \quad n=1,2,\cdots\end{cases}$$

例2：证明黎曼函数于区间 $[0,1]$ 上可积.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,1,\text{及}\ (0,1)\ \text{中的无理数}\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, q>p, (q,p)=1.\end{cases}$$

9.4 定积分:性质（1）

性质1：$\int_a^b [cf(x) \pm dg(x)]\mathrm{d}x$

$$= c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm d\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

性质2：f, g 于 $[a,b]$ 可积 $\Rightarrow$ $f \cdot g$ 于 $[a,b]$ 可积.

性质3：f于 $[a,b]$ 可积 $\Leftrightarrow$ $\forall\ c \in [a,b]$,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

性质4：f于 $[a,b]$ 可积 $\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$

9.4 定积分:性质（2）

对比：

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(f_1 + f_2 + \cdots f_n), \qquad \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \mathrm{d}x}$$

$$\bar{x} = \frac{p_1 f_1 + p_2 f_2 + \cdots p_n f}{p_1 + p_2 + \cdots p_n}, \qquad \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \mathrm{g}(x)\mathrm{d}x}$$

9.4 定积分:性质（3）

性质5：f于 $[a,b]$ 连续 $\Rightarrow\ \exists\xi\in[a,b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

性质6：f,g于 $[a,b]$ 连续且g于 $[a,b]$ 上不变号，

则 $\exists\xi\in[a,b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

9.4 定积分:性质（4）

例1：求 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ 其中

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & -1\le x<0, \\ e^{-x}, & 0\le x\le 1. \end{cases}$$

例2：若 f 于 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)\ge 0$,

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 $f(x)\equiv 0, x\in[a,b]$.

例3：求 $f(x)=\sin x$在 $[0,\pi]$ 上的平均值.

9.5.1 定积分:积分上限函数及应用

积分上限函数：

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b]$$

定理：

1. $\Phi(x)\in C[a,b]$.

2. 若 $f\in C[a,b]$,则 $\Phi'(x)=f(x), x\in[a,b]$.

例： 利用积分上限函数证明**牛--莱**公式.

9.5.2 定积分:换元法与分部积分法

换元积分法

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \overset{x=\varphi(t)}{=} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

分部积分法

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

泰勒公式的积分型余项

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t.$$

9.5.3 定积分:积分第二中值定理(1)

定理: 设 f 于 $[a,b]$ 可积,则

(1) 若 g 单减,非负,则存在 $\xi \in [a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x$$

(2) 若 g 单增,非负,则存在 $\xi \in [a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

9.5.3 定积分:积分第二中值定理(2)

(3) 若 g 单调, 则存在$\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$= g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

9.5.4 定积分:计算举例（1）

例 1：求 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

例 2：求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t\,\mathrm{d}t$

例 3：证明 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos(\frac{\pi}{4}-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos u\,\mathrm{d}u.$

例 4：求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x.$

9.5.4 定积分:计算举例（2）

例 5：证 明

$$\int_a^b u(x)v^{(n+1)}(x)\mathrm{d}x$$

$$= [u(x)v^{(n)}(x) - u'(x)v^{(n-1)}(x) + \cdots +$$

$$(-1)^n u^{(n)}(x)v(x)]_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

例 6：证 明 当 $x, c > 0$ 时，

$$\left|\int_x^{x+c} \sin t^2 \mathrm{d}t\right| < \frac{1}{x}.$$

9.6 习题选讲（1）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$.

2. 求由曲线 $y=x|1-x|$ 以及直线 $x=2$ 和 x 轴所围曲边梯形的面积.

3. 设在上可积，且 $f''(x)>0$. 求证

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

4. f,g于 $[a,b]$ 可积，除点 a 之外，$f(x)=g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

9.6 习题选讲（2）

5. 设 $y = f(x)$为 $[a, b]$ 上严格增的连续曲线. 试证：存在 $\xi \in (a, b)$, 使图中两阴影部分的面积相等.

10.0 定积分应用:引言

- 求面积
- 求体积
- 求弧长、曲率
- 旋转曲面的面积
- 物理中一些应用

10.1 曲边梯形的面积（1）

曲边梯形：$f(x), g(x)$, $x = a, x = b\ (a < b)$

所围成，则其面积为

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

例 1 求 $y^2 = x, x - 2y - 3 = 0$ 所围之面积.

例 2 求 $y = x^2, x = y^2$ 所围之面积.

例 3 求 $y = x^2, y = \frac{x^2}{4}, y = 1$ 所围之面积.

10.1 曲边梯形的面积（2）

曲边梯形：$x=\varphi(t), y=\phi(t), t\in[\alpha,\beta]$,

$x=a, x=b\ (a<b)$，x轴所围成，

则其面积为

$$S=\int_a^b|\phi(\varphi^{-1}(x))|\,\mathrm{d}\,x\overset{x=\varphi(t)}{=}\int_\alpha^\beta|\phi(t)\varphi'(t)|\,\mathrm{d}\,t$$

例 1 求 $y^2=x$ 与 $x-2y-3=0$

所围之面积.

10.1 曲边梯形的面积（3）

扇形：$x = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$,

$\theta = \alpha, \theta = \beta \quad (\beta - \alpha \leq 2\pi)$ 所围成，

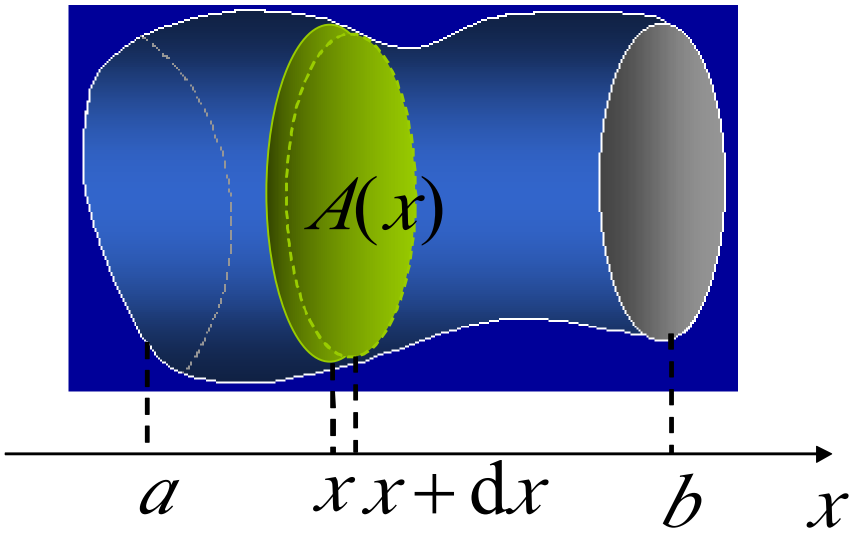
则其面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

例 1 求椭圆的面积.

10.2 求体积（1）

立体：夹在 $x = a, x = b$ 之间，



10.2 求体积（2）

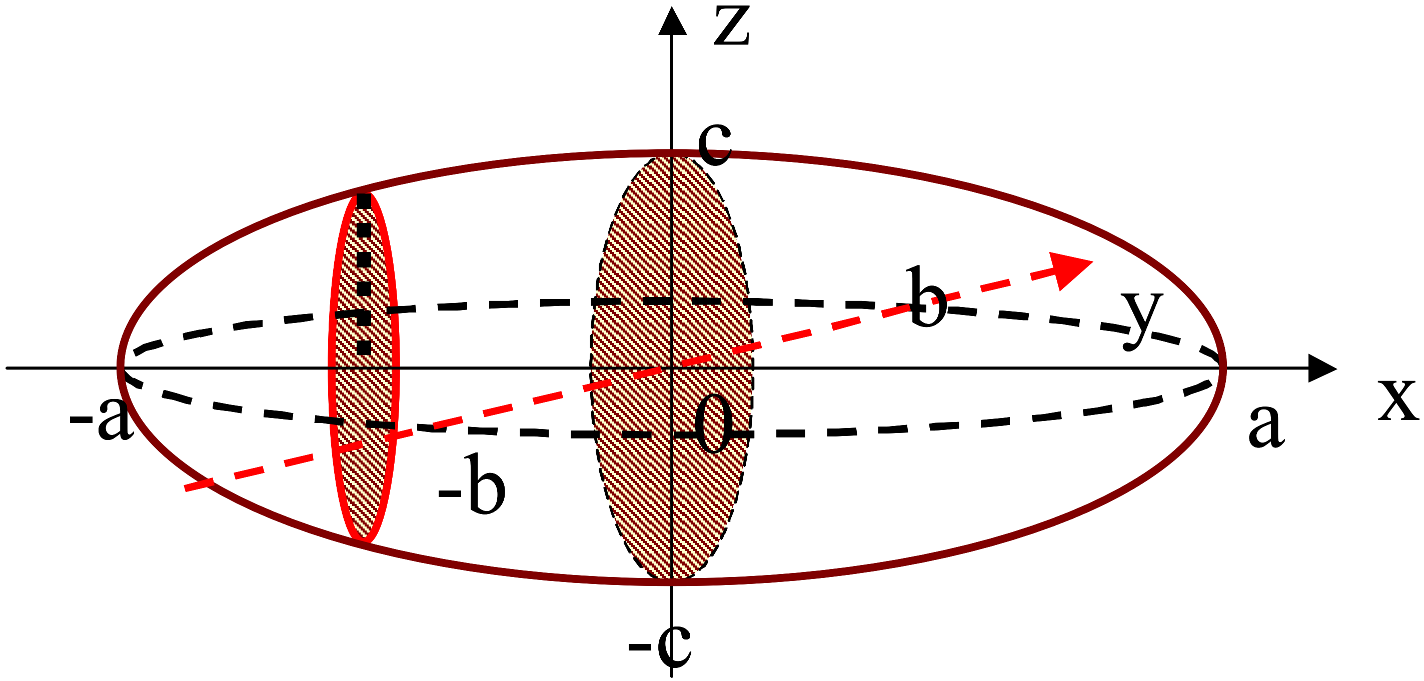
$A(x)$: 在 x 处垂直于 x 轴的平面与立体的截面（$A(x) \in C[a,b]$）.

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\Delta x_i$$

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}\,x$$

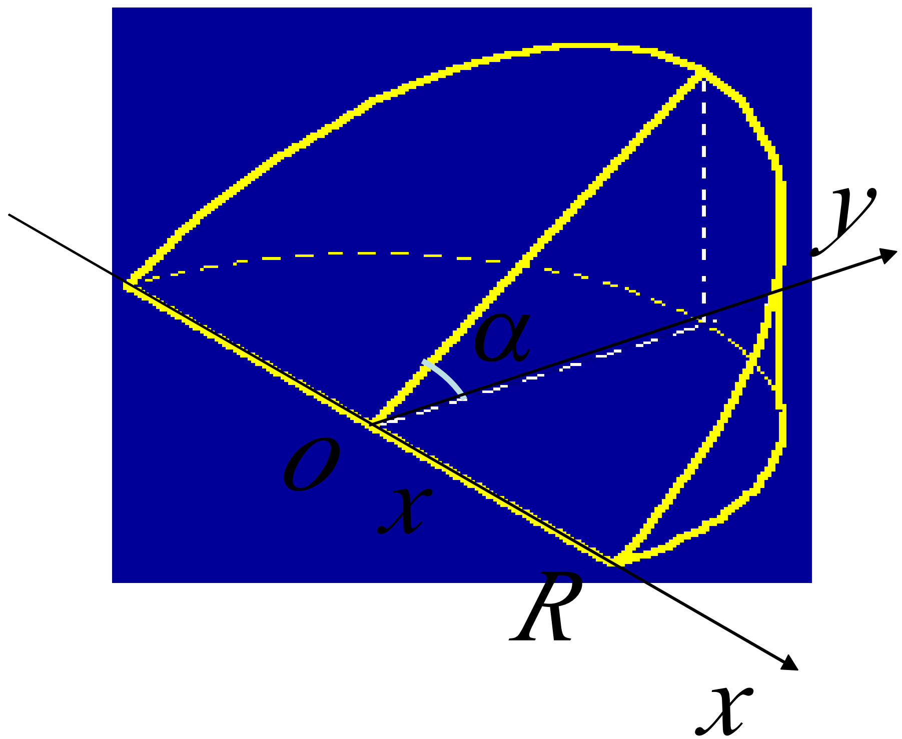
10.2 例子（1）

例1： 求由椭球面所围立体的体积.

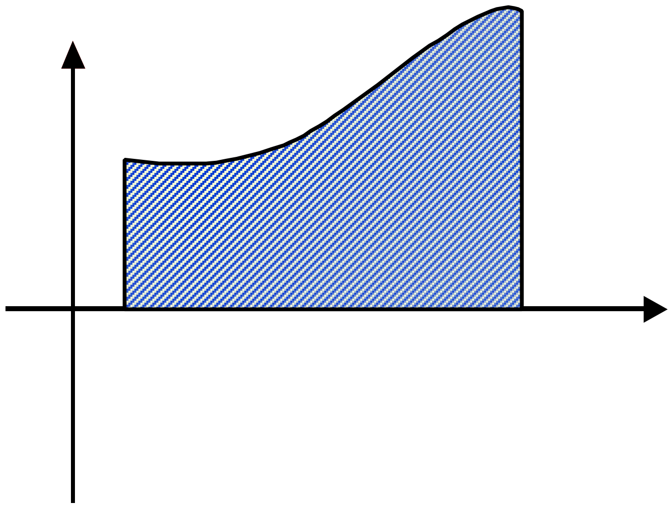


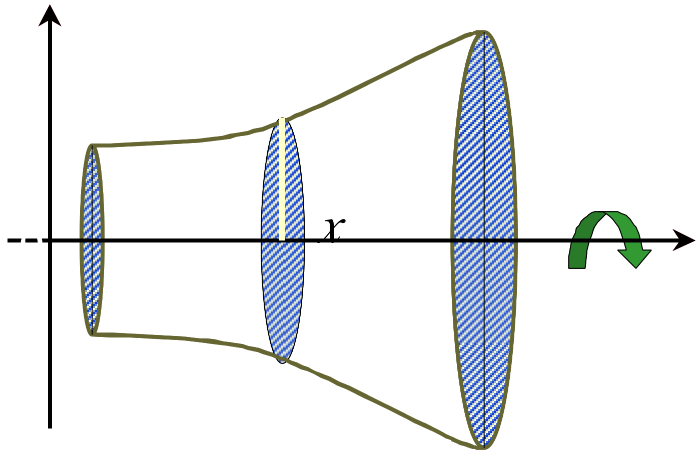
10.2 例子（2）

例2： 直圆柱体被通过底面直径的斜平面所截，试求截得契形体的体积.



10.2 应用：旋转体体积（1）





$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \mathrm{d}x$$

10.3 弧长（1）

光滑曲线：$x=\varphi(t),\ y=\phi(t)\ ,t\in[\alpha,\beta],$

$\varphi'(t),\phi'(t)\in C^1[\alpha,\beta]$ 且 $[\varphi'(t)]^2+[\phi'(t)]^2\neq 0$

定理: 设 $MN: x=\varphi(t),\ y=\phi(t)\ ,t\in[\alpha,\beta]$

是光滑曲线段，则 MN 的弧长

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\phi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

10.3 弧长（2）

推论1: 设 $MN: y = f(x) \in C[a,b]$,则

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

推论2: 设 $MN: r = f(\theta), f'(\theta) \in C^1[\alpha, \beta]$,

则

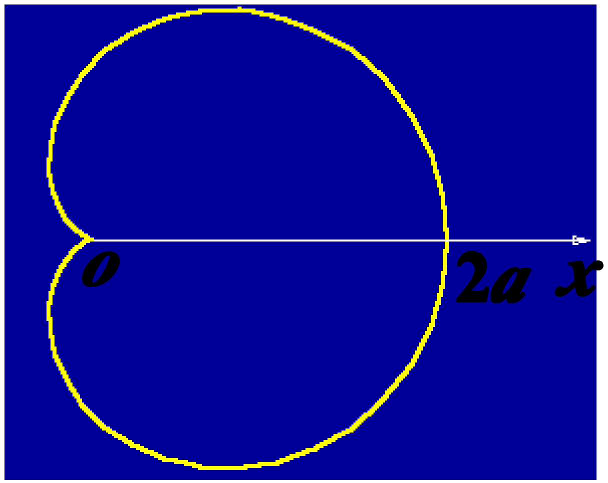
$$s = \int_a^b \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

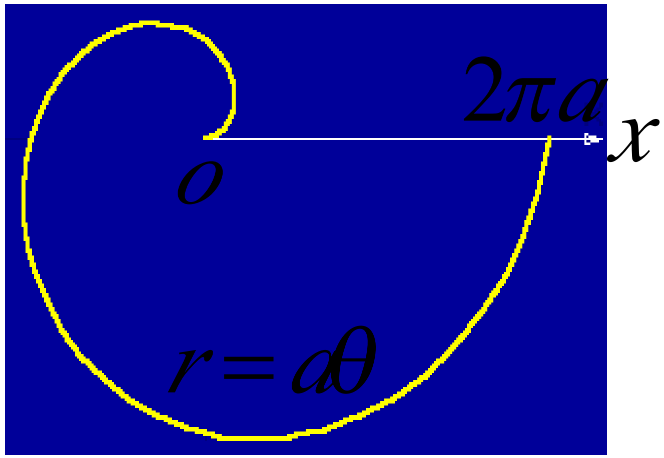
10.3 例子

例1： 求椭圆的周长．

例2： 求心形线的周长．

例3： 求阿基米德螺线的周长．





10.3 旋转曲面的面积（1）

光滑曲线：$y = f(x),\ x \in [a, b]$,

$$\Delta S \approx \pi[f(x) + f(x+\Delta x)]\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$= \pi[2f(x) + \Delta y]\sqrt{1 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}\,\Delta x$$

$$\approx 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}\,x$$

$\Rightarrow$

$$s = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}\,x.$$

10.3 旋转曲面的面积（2）

光滑曲线： $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta],$

$$s = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}\,x.$$

$$\overset{x=x(t),\,y=y(t)}{=} 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{1+[y'(t)\frac{1}{x'(t)}]^2}\,x'(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$= 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}\,t$$

10.4 微元法（1）

引入量：$\Phi(x),\ x\in[a,b],\Phi(a)=0;$

欲求量：$\Phi(b)$（面积、体积、弧长等）

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$$

若 $\Delta\Phi\approx f(x)\Delta x,$ 且 $\Delta\Phi-f(x)\Delta x=o(\Delta x)$

则 Φ 于 x 可微且 $\Phi'(x)=f(x)$

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathbf{d}t+C$$

$$\Phi(a)=0\Rightarrow C=0$$

从而 $\Phi(b)=\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x$

10.4 微元法（2）

例 设 MN: $y = f(x) \in C^1[a,b]$, 则

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

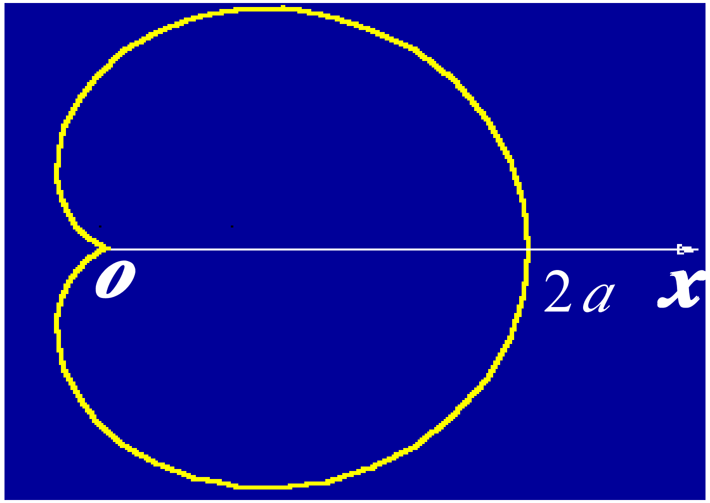
解 $\Delta s \approx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\Delta x$

$$m \le f'(x) \le M$$

$$m\Delta x \le \Delta s \le M\Delta x$$

$$\Delta s - \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\Delta x = o(\Delta x)$$

10.5 习题选讲（1）



$$r = a(1+\cos\theta)\quad (a>0)$$

或

$$\begin{cases} x = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}\qquad \theta\in[0,2\pi]$$

1. 求心形线所围图形的面积.

2. 求心形线的周长.

3. 求心形线绕极轴旋转所围立体的体积.

4. 求心形线绕极轴旋转所旋转曲面的面积.

10.5 习题选讲（2）

1. $S=2\int_{0}^{\pi}|y(\theta)x'(\theta)|\,\mathrm{d}\theta$

2. $\mathrm{L}=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{r^{2}+r'^{2}}\,\mathrm{d}\theta$

3. $\mathrm{V}=\int_{-\frac{a}{4}}^{2a}\pi y^{2}\mathrm{d}x-\int_{-\frac{a}{4}}^{0}\pi y^{2}\mathrm{d}x$

$$=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{0}\pi(r\sin\theta)^{2}(r\cos\theta)'\mathrm{d}\theta$$

$$-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{2\pi}\pi(r\sin\theta)^{2}(r\cos\theta)'\mathrm{d}\theta$$

4. $S=2\pi\int_{0}^{\pi}\sqrt{(r\cos\theta)'^{2}+(r\sin\theta)'^{2}}\,\mathrm{d}\theta$

11.0 反常积分

定积分：$[a,b]$; $|f(x)|\leq M$.

推广1：$[a,b]\to[a,+\infty),(-\infty,b],(-\infty,+\infty)$

推广2：$\exists\, x_0\in[a,b]$,使 $f(x)$ 在 x_0 附近无界，则称 x_0 为 $f(x)$ 的瑕点.

例如：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

11.1 两类反常积分的定义（1）

定义1： 无穷积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛} \Leftrightarrow \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x \text{ 存在.}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 发散} \Leftrightarrow \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x \text{ 不存在.}$$

定义2： 瑕积分（点 a 为瑕点）

$$\int_a^{\mathrm{b}} f(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛} \Leftrightarrow \lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x \text{ 存在.}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ 发散} \Leftrightarrow \lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x \text{ 不存在.}$$

11.1 两类反常积分的定义（2）

注1： $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{u\to-\infty}\int_{u}^{b} f(x)\mathrm{d}x$

注2： $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛 $\Leftrightarrow \forall c,$

$\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x, \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$都收敛.

注3： $\int_{a}^{\mathrm{b}} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{u\to b^-}\int_{a}^{u} f(x)\mathrm{d}x$

（b为瑕点）

11.1 两类反常积分的定义（3）

例：讨论下列积分的收敛性

1. $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ **2.** $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ **4.** $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

5. $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^q}\quad(q>0)$ **6.** $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}\quad(p>0)$

11.2.1 无穷积分的性质（1）

1. $\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x, \int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$ 敛

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty}[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]\mathrm{d}x \text{ 敛};$$

2. $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛态 $(a < b)$;

推：$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{u \to +\infty} \int_u^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$;

11.2.1 无穷积分的性质（2）

3. Cauchy准则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 敛} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A, \text{s.t.}\, u_1, u_2 > A$$

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon;$$

4. $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 敛且

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x;$$

即：绝对收敛一定收敛，但反之不然（例？）

11.2.2 比较判别法（1）

定理 1.（比较判别法）

若 $|f(x)| \le g(x),\ x \in [a, +\infty)$，则

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \text{ 敛} \Rightarrow \int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ 敛};$$

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ 散} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \text{ 散}$$

推论 1：

$$|f(x)| \le \frac{1}{x^p},\ p > 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ 敛};$$

$$|f(x)| \ge \frac{1}{x^p},\ p \le 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ 散}.$$

11.2.2 比较判别法（2）

推论2.（比较判别法的极限形式）

若 $g(x)>0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|f(x)|}{g(x)}=c$，则

$c\in(0,+\infty)$：$\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$，$\int_a^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛态；

$c=0$：$\int_a^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x$ 敛 $\Rightarrow\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝敛；

$c=+\infty$：$\int_a^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x$ 散 $\Rightarrow\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 散.

11.2.2 比较判别法（3）

推论3：

若 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^p \,|\, f(x) \,|= \lambda$，则

$$\lambda \in [0, +\infty), p > 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} |\, f(x) \,|\, \mathrm{d}x \text{ 敛；}$$

$$\lambda \in (0, +\infty], p \le 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} |\, f(x) \,|\, \mathrm{d}x \text{ 散}.$$

11.2.2 比较判别法（4）

例：讨论下列无穷积分的收敛性

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ 4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^5}}\,\mathrm{d}x$ 6. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\lambda}\ln x}\,\mathrm{d}x$

11.2.3 狄利克雷判别法（1）

定理 若 $f(x)$在 $[a,+\infty)$上连续$(a>0)$,且 $F(u)=\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$上有界.则当 $\lambda>0$时,$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x^\lambda}\,\mathrm{d}x$收敛.

定理（狄利克雷判别法）

若 $F(u)=\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$上有界， $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$上单调趋于零,则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$收敛.

11.2.3 狄利克雷判别法（2）

推论 **（阿贝尔判别法）**

若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛且 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

例 讨论下列无穷积分的收敛性

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,\mathrm{d}x \ (p>0)$

2. $\int_1^{+\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x$

11.2.3狄利克雷判别法（3）

：

1. 若$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛,是否有$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$?

2. 若$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛,且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在,

是否有$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$?

例 讨论下列无穷积分的收敛性

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,\mathrm{d}x \ (p>0)$ 2. $\int_1^{+\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x$

11.3.1 瑕积分的性质（1）

设 a为瑕点，则

1. $\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x, \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$ 敛

$$\Rightarrow \int_a^b [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]\mathrm{d}x \text{ 敛};$$

2. Cauchy准则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ 敛} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{s.t.}$$

$$u_1, u_2 \in (a, a+\delta), \left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon;$$

11.3.1 瑕积分的性质（2）

3. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 同敛态；

4. $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 敛且

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x;$$

即：绝对收敛一定收敛，但反之不然（例？）

11.3.2 比较判别法（1）

定理 1.（比较判别法）

若 $|f(x)|\le g(x),\ x\in(a,b]$，则

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \text{ 敛} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 绝敛};$$

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ 散} \Rightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \text{ 散}$$

推论：

$$|f(x)|\le \frac{1}{(x-a)^p},\ p\in(0,1) \Rightarrow \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ 敛};$$

$$|f(x)|\ge \frac{1}{(x-a)^p},\ p\ge 1 \Rightarrow \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ 散}.$$

11.3.2 比较判别法（2）

定理2.（比较判别法的极限形式）

若 $g(x)>0,\ \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{|f(x)|}{g(x)}=c$，则

$c\in(0,+\infty)$：$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$，$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛态；

$c=0$：$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 敛 $\Rightarrow \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 敛；

$c=+\infty$：$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 散 $\Rightarrow \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 散.

11.3.2 比较判别法（3）

推论：

若 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p\,|\,f(x)\,|=\lambda$，则

$\lambda\in[0,+\infty),\ p\in(0,1)\Rightarrow\int_a^{+\infty}|\,f(x)\,|\,\mathrm{d}x$ 敛；

$\lambda\in(0,+\infty],\ p\geq 1\Rightarrow\int_a^{+\infty}|\,f(x)\,|\,\mathrm{d}x$ 散.

11.3.2 比较判别法（4）

例：讨 论 下 列 瑕 积 分 的 收 敛 性

1. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$

2. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \mathrm{d}x$

3. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \mathrm{d}x$

11.4 习题选讲（1）

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$

2. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在 $\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

3. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, f于$[a,+\infty)$单调 $\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

4. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝敛, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$ 存在 $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 绝敛

5. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 条敛, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$ 存在 $\Rightarrow$?

11.4 习题选讲（2）

6. $\int_0^1 \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

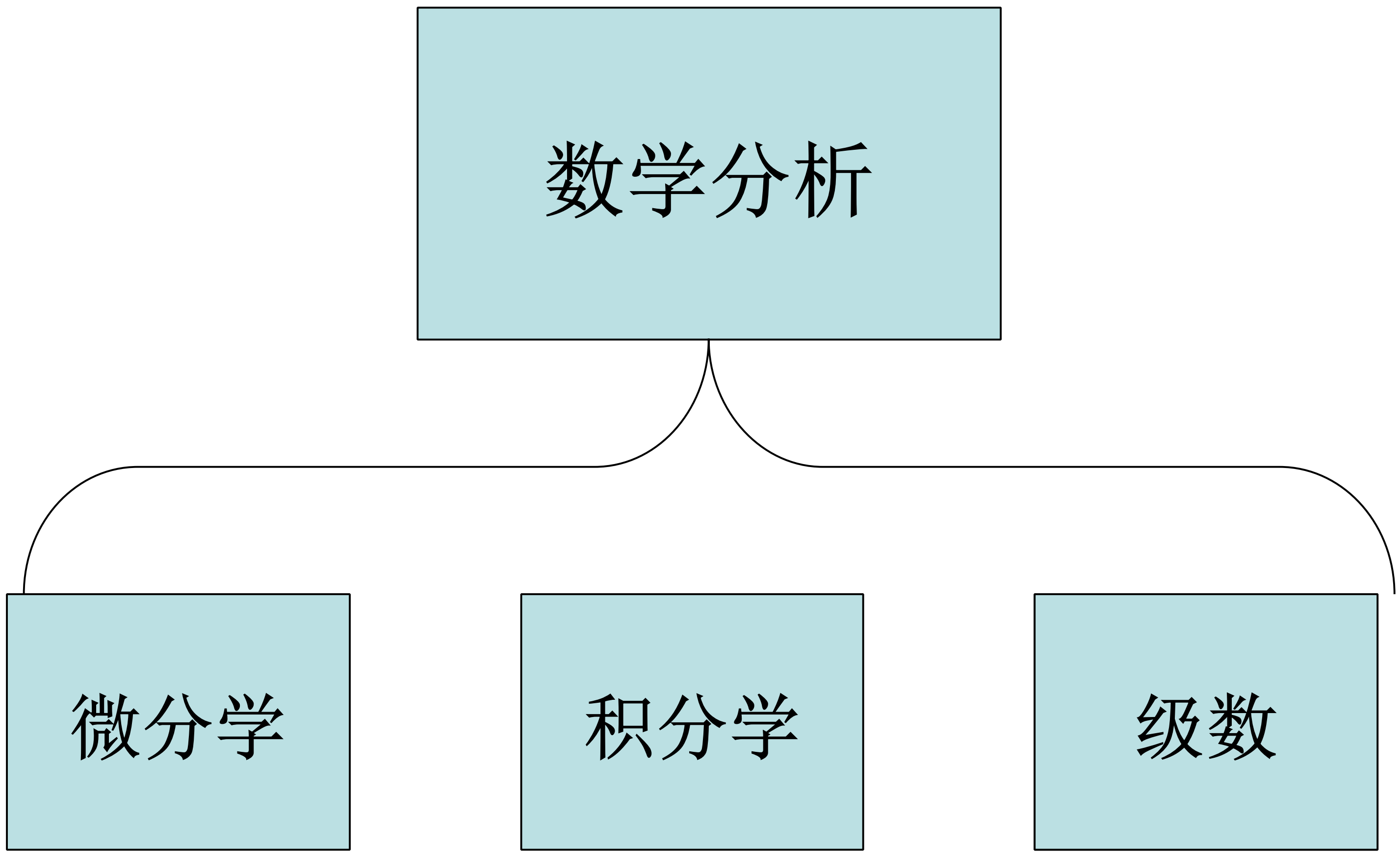
7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x\cos^m x}$

8. $\int_1^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛

9. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = 0$?

10. $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x-1}\,\mathrm{d}x$

数学分析知识结构（1）



数学分析知识结构（2）

- 积分学
  - 不定积分
  - 定积分
  - 广义积分
  - 重积分
  - 曲线积分
  - 曲面积分

数学分析知识结构（3）

- 微分学
  - 导数
  - 微分
  - 偏导数
  - 偏微分
  - 几何应用