数学分析（**4**）

Mathematical Analysis

第十七章　多元函数微分学

§1 偏导数与可微性

设$z=f(x,y),P_0(x_0,y_0)$

f于P_0可微：

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2});$$

f于P_0的全微分：

$$dz\Big|_{P_0}=df(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y.$$

设f于P_0可微,则

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0).$$

§1 偏导数与可微性

例: 考察 $f(x,y)=xy$ 于 (x_0,y_0) 的可微性.

问：设 f 于 P_0 可微, A, B 与 f 有何关系?

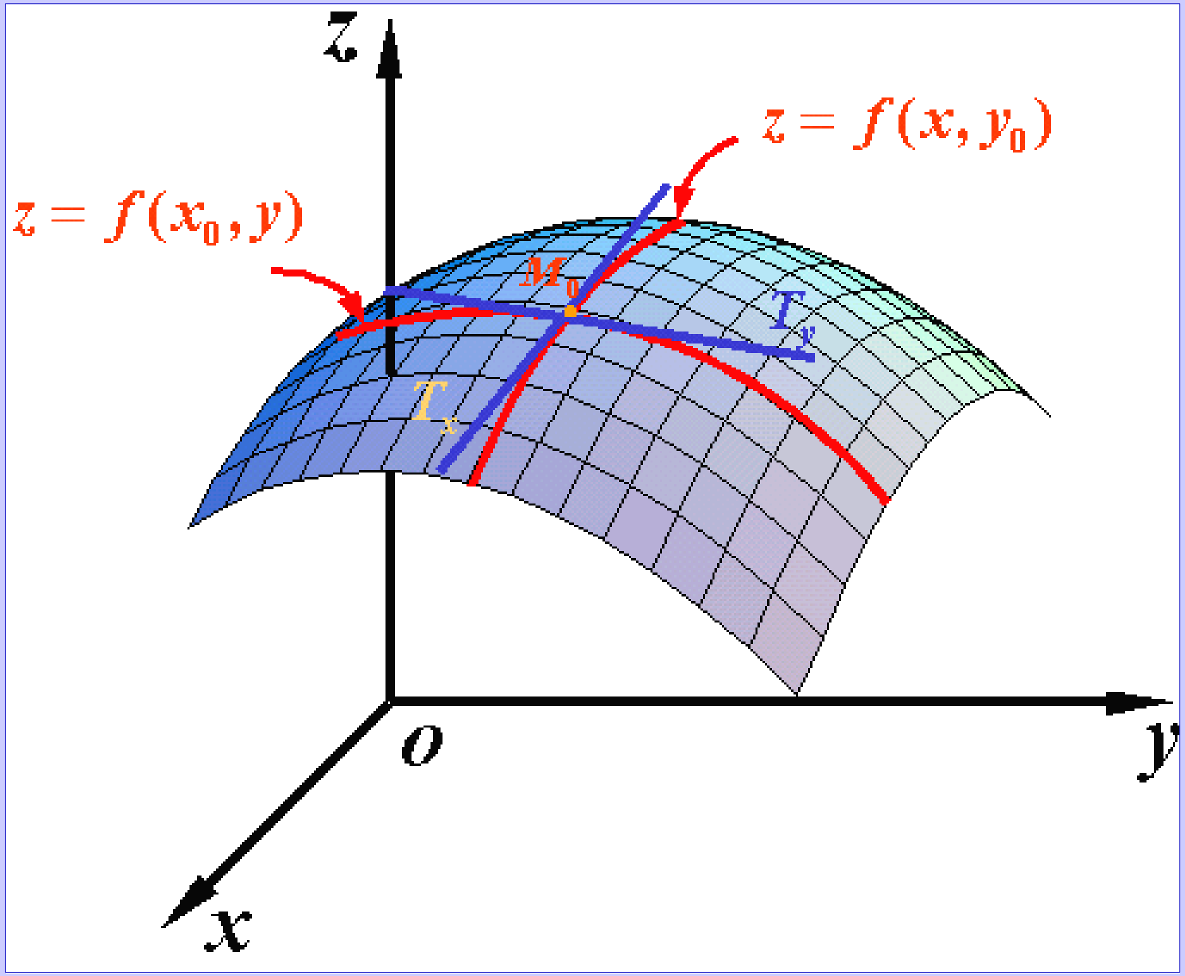
§1 偏导数与可微性

定义：

$$f_x(x_0,y_0)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0};$$

$$f_y(x_0,y_0)=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}.$$

§1 偏导数与可微性



§1 偏导数与可微性

例: 求下列函数在原点的偏导数

$$1.\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\[2ex] 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

$$2.\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\[2ex] 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

§1 偏导数与可微性

定理（可微的必要条件）

设$z=f(x,y)$于$P_0(x_0,y_0)$可微, 则$f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$存在, 且$dz=f_x(x_0,y_0)dx+f_y(x_0,y_0)dy$.

定理（可微的充分条件）

设$z=f(x,y)$的偏导数于$P_0(x_0,y_0)$的某邻域内存在且于P_0连续, 则f于P_0可微.

§1 偏导数与可微性

曲面 $z=f(x,y)$ 于 $P_0(x_0,y_0)$ 处的：

切平面：

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0;$$

法向量：

$$\vec{n}=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1);$$

法线：

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

§2 复合函数微分法

链式法则:

设 $z=f(x,y),\ x=g(s,t),\ y=h(s,t)$,则

$$\begin{pmatrix} z_s & z_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_x & z_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{cases} z_s = z_x x_s + z_y y_s \\ z_t = z_x x_t + z_y y_t \end{cases}$$

§2 复合函数微分法

例:

1. 设 $z=\ln(u^2+v), u=e^{x+y^2}, v=x^2+y,$

求 z_x, z_y.

2. $u=u(x,y), x=r\cos\theta, y=r\sin\theta,$ 证明

$$u_r{}^2+\frac{1}{r^2}u_\theta{}^2=u_x{}^2+u_y{}^2.$$

3. $z=uv+\sin t, u=e^t, v=\cos t,$ 求 $z'(t)$.

4. $y=x^x,$ 求 $y'(t)$.

§2 复合函数微分法

一阶全微分形式不变性:

1. $z=f(x,y),\ x,y$为自变量$\Rightarrow dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy.$

2. $z=f(x,y),\ x=g(s,t),\ y=h(s,t)\Rightarrow$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial s}ds+\frac{\partial z}{\partial t}dt$$

$$=\cdots$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

§2 复合函数微分法

例:

$$z = e^{xy}\sin(x+y),\ 求\ \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, dz.$$

§3 方向导数与梯度

方向导数:

ℓ为由P_0出发的单位向量, $P=P_0+t\ell$

$$f_\ell(P_0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(P_0+t\ell)-f(P_0)}{t}.$$

例.

$\ell=(1,0)$,求$f_\ell(P_0), f_{-\ell}(P_0)$.

§3 方向导数与梯度

定理:

$\ell=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, f于P_0可微, 则

$$f_\ell(P_0)=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma.$$

推论:

f于P_0可微, 则 $f_{-\ell}(P_0)=-f_\ell(P_0)$.

§3 方向导数与梯度

例.

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x^2, -\infty<x<+\infty \\ 0, & other\end{cases}$$

ℓ 为任意方向, 求 $f_\ell(0,0)$.

§3 方向导数与梯度

梯度:

$$grad\, f(P_0) = (f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)).$$

定理:

$$f_\ell(P_0) = \left| grad\, f(P_0) \right| \cdot \cos\theta.$$

其中, θ为梯度向量与方向ℓ之夹角.

§3 方向导数与梯度

推论:

当f于P_0可微时,f于P_0沿梯度方向是f变化最快的方向.

例.

$f(x,y,z)=xy^2+yz^3$,求 f在$P_0(2,-1,1)$处的梯度及模.

§4 泰勒公式与极值

高阶偏导数:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=f_{xx};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f_{yy};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=f_{xy};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f_{yx}.$$

例:求 $f(x,y)=x^3y^2-3xy^3-xy+1$ 的四个二阶偏导数.

§4泰勒公式与极值

例:求下列函数的四个二阶偏导数，观察混合偏导数是否相等.

1. $f(x,y)=x^3y^2-3xy^3-xy+1$;

2. $f(x,y)=e^{ax}\cos by$.

§4泰勒公式与极值

定理：

若 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 与 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 在区域D内连续，

则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

§4泰勒公式与极值

复合函数的高阶偏导数：

$z = f(x, y),\quad x = g(s, t),\quad y = h(s, t)$ 则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) +$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right).$$

§4泰勒公式与极值

凸区域:

$\forall P_1, P_2 \in D \Rightarrow \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in D.$

$(\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1)$

中值定理:

f于凸开域$D \subset R^2$上连续, 于内所有内点都可微, 则对$P(a,b), Q(a+h,b+k) \in D$, $\exists \theta \in (0,1)$, 使得

$$f(a+h,b+k) - f(a,b)$$
$$= f_x(a+\theta h, b+\theta k)h + f_y(a+\theta h, b+\theta k)k$$

§4泰勒公式与极值

泰勒定理:

f于$U(P_0)$内有直到$n+1$阶的连续偏导数,

$(x_0+h, y_0+k)\in U(P_0)$,则存在相应的$\theta\in(0,1)$,使:

$$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k).$$

§4泰勒公式与极值

例. 求 $(1.08)^{3.96}$ 的近似值.

极值: $P\in U(P_0)$

f于P_0取极大值: $f(P)\le f(P_0)$;

f于P_0取极小值: $f(P)\ge f(P_0)$.

极值的必要条件:

若 $f_x(P_0), f_y(P_0)$存在且$f(P_0)$极值,则$f_x(P_0)=f_y(P_0)=0$.

（P_0 为稳定点）

§4泰勒公式与极值

Hesse矩阵:

$$H_f(P_0)=\begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}_{P_0}.$$

极值的充分条件:

若f于$U(P_0)$内存在二阶连续偏导数, P_0为f的稳定点, 则

$H_f(P_0)$正定时, $f(P_0)$极小;

$H_f(P_0)$负定时, $f(P_0)$极大;

$H_f(P_0)$不定时, $f(P_0)$非极值.?

§4泰勒公式与极值

推论:

若f于$U(P_0)$内存在二阶连续偏导数, P_0为f的稳定点, 则

$f_{xx}(P_0) > 0, (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^{\ 2})(P_0) > 0 \Rightarrow f(P_0)$极小;

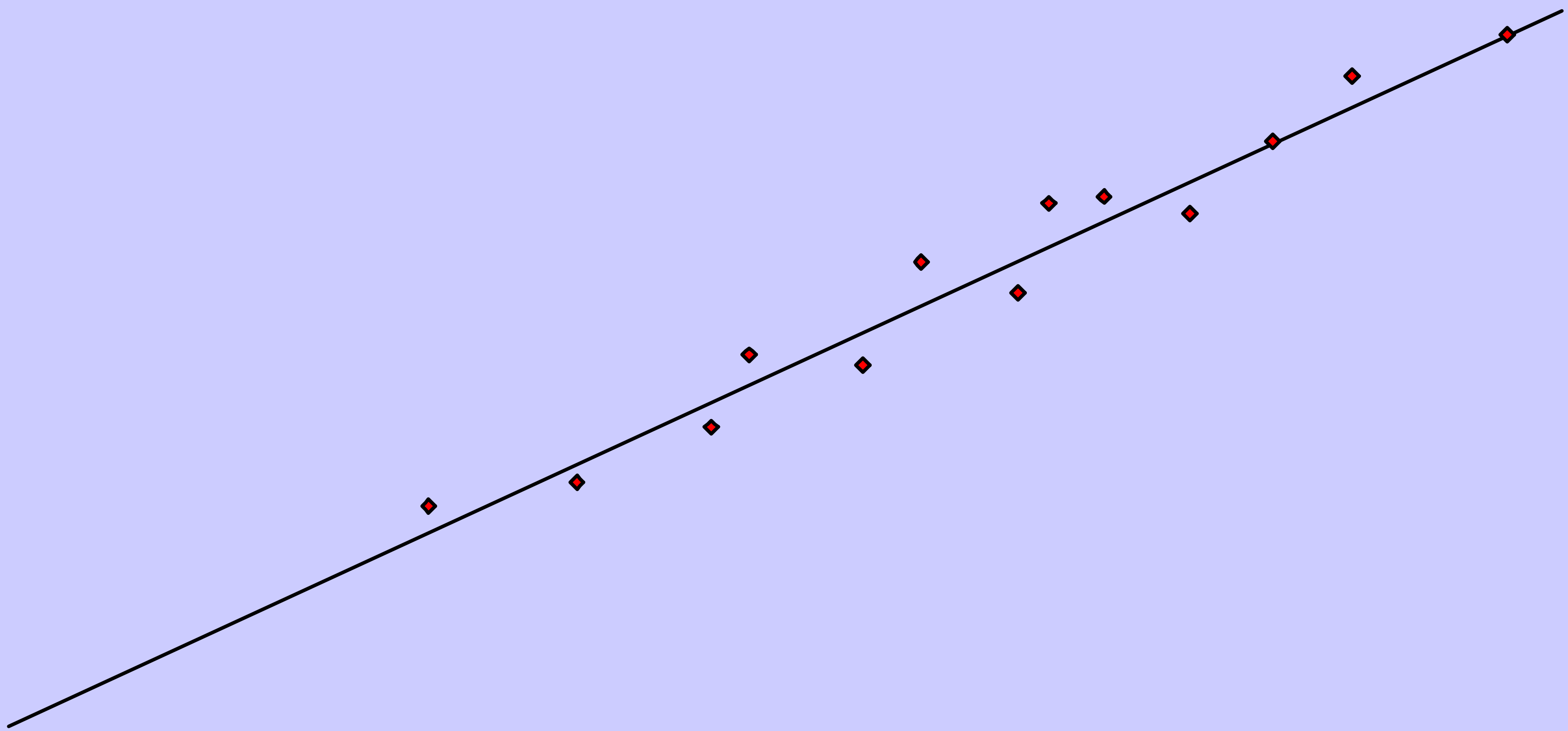
$f_{xx}(P_0) < 0, (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^{\ 2})(P_0) > 0 \Rightarrow f(P_0)$极大;

$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^{\ 2})(P_0) < 0 \Rightarrow f(P_0)$非极值;

$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^{\ 2})(P_0) = 0 \Rightarrow f(P_0)$不定.

§4泰勒公式与极值

最小二乘法



第十八章 隐函数定理及应用

§**1** 隐函数定理

§**2** 隐函数组定理

§**3** 几何应用

§1 隐函数定理

隐函数:

若对P_0某一邻域内的任一x, 由$F(x,y)=0$能唯一确定一个y, 则称这种对应关系为由$F(x,y)=0$所确定的隐函数.

例:

$F(x,y)=x^2+y^2-1.$

§1 隐函数定理

隐函数存在定理:

$F(x,y)$在以$P_0(x_0,y_0)$的区域D上满足:

1. 连续;　　2. $F(x_0,y_0)=0$;

3. F_y于D内连续且$F_y(x_0,y_0)\neq 0$;

则于P_0的某邻域$U(P_0)$内唯一确定一个定义在某区间$(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$上的隐函数$y=f(x)$, 使得

$f(x_0)=y_0$; $(x,f(x))\in U(P_0)$; $F(x,f(x))=0$;

且$f(x)$在$(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$内连续.

§1 隐函数定理

隐函数可微性定理:

$F(x,y)$在以$P_0(x_0,y_0)$的区域D上满足:

1. 连续; 2. $F(x_0,y_0)=0$;

3. F_x,F_y于D内连续且$F_y(P_0)\neq 0$;

则于$(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$内有连续导函数, 且

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

§1 隐函数定理

例:

1. $F(x,y)=y-x-\frac{1}{2}\sin y=0,\ \ P_0(0,0).$

2. $F(x,y)=x^3+y^3-3axy=0,\ \ y^2-ax\neq 0.$

3. $F(x,y,z)=xyz^3+x^2+y^3-z=0,\ \ P_0(0,0,0).$

§1 隐函数定理

4. (***反函数及其导数的存在性***)

设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有连续的导函数 $f'(x)$，$f(x_0)=y_0, f'(x_0)\neq 0$, 则在 y_0 的某邻域内, 存在连续可微的反函数 $x=g(y)$.

§2 隐函数组定理

隐函数组:

若任意 $(x,y)\in D$,由$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 唯一确定u和v,

则称$u=f(x,y),v=g(x,y)$为由方程组所确定的隐函数组.

雅可比行列式:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}.$$

§2 隐函数组定理

隐函数组存在定理:

$F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$在以$P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$为内点的区域D上连续:

$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0;$

$F_x,F_y,F_u,F_v,G_x,G_y,G_u,G_v$于$D$内连续;

$$J=\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}\neq 0;$$

则于D内P_0的某邻域$U(P_0)$内唯一确定一组个定义在$Q_0(x_0,y_0)$某邻域内的隐函数组$u=f(x,y),v=g(x,y)$使得

§2 隐函数组定理

1. $u_0 = f(x_0, y_0), v_0 = g(x_0, y_0), F(x, y, f(x, y), g(x, y)) \equiv 0,$

$G(x, y, f(x, y), g(x, y)) \equiv 0;$

2. $f(x, y), g(x, y)$在$U(Q_0)$内连续;

3. $f(x, y), g(x, y)$在$U(Q_0)$内有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}.$$

§2 隐函数组定理

例:

讨论方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=u^2+v^2-x^2-y=0 \\ G(x,y,u,v)=-u+v-xy+1=0 \end{cases},$$

在点$P_0(2,1,1,2)$近旁能确定怎样的隐函数组，

并求其偏导数.

§3 几何应用

平面曲线： $F(x,y)=0,\quad P_0(x_0,y_0)$

切线： $F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)=0;$

法线： $F_y(P_0)(x-x_0)-F_x(P_0)(y-y_0)=0.$

空间曲线： $x=x(t),y=y(t),z=z(t),\quad P_0(x_0,y_0)$

切线： $\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)};$

法平面： $x'(t_0)(x-x_0)-y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$

§3 几何应用

曲面: $F(x,y,z)=0,\ \ P_0(x_0,y_0,z_0)$

切平面: $F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0;$

法　线: $\dfrac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(P_0)}.$

§4 条件极值

条件极值:

在条件 $C:\varphi(x,y)=0$ 的限制下, 求 $z=f(x,y)$ 的极值.

拉格朗日乘数法:

引入 $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$, 由

$$\begin{cases} L_x(x_0,y_0,z_0)=f_x(P_0)+\lambda\varphi_x(P_0)=0 \\ L_y(x_0,y_0,z_0)=f_y(P_0)+\lambda\varphi_y(P_0)=0 \\ L_\lambda(x_0,y_0,z_0)=\varphi(P_0)=0 \end{cases}$$

……

§4 条件极值

例:

求 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{r}\ (x,y,z,r>0)$

下的极小值;并证明不等式

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1}\le\sqrt[3]{abc},$$

其中 a,b,c 为任意常数.

第十九章 含参量积分

§ 1 含参量正常积分

§ 2 含参量反常积分

§ 3 欧拉积分

§1 含参量正常积分

含参量正常积分：

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y,$$

其中 $x\in[a,b], c(x), d(x)\in C[a,b]$

特别：

$$I(x)=\int_{a}^{b} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

§1 含参量正常积分

性质定理:

在一定条件下, 含参变量正常积分具有下列性质:

1. $F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \in C[a,b].$

2. $\dfrac{d}{dx}\int_{c}^{d} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{c}^{d} f_x(x,y)\mathrm{d}y.$

3. $\dfrac{d}{dx}\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x,y)\mathrm{d}y+f(x,d(x))d'(x)$

$-f(x,c(x))c'(x).$

4. $\int_{a}^{b} dx\int_{c}^{d} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{c}^{d} dy\int_{a}^{b} f(x,y)\mathrm{d}x.$

§1 含参量正常积分

应用举例:

1. 求 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$.

2. 计算积分 $I=\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

3. 设 $\varphi(x)=\dfrac{1}{(n-1)!}\int_0^x(x-t)^{n-1}f(t)\mathrm{d}t$, 求 $\varphi^{(k)}(x), k=1,2,\cdots,n$.

4. 求 $\int_0^1\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$.

§2 含参量反常积分

含参量反常积分:

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y,\ x\in[a,b]$$

含参量反常积分的一致收敛:

$\forall\varepsilon>0,\exists N>c,\ s.t\,M>N$时对一切$x\in[a,b]$, 都有

$$\left|\int_M^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right|<\varepsilon.$$

§2 含参量反常积分

一致收敛的柯西准则:

$\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$于$[a,b]$上一致收敛$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists M>c,$

$s.t\ A_1, A_2>M$时对一切$x\in[a,b]$, 都有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon.$$

例.

证明含参量反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}\mathrm{d}y$于$[\delta,+\infty)$上

一致收敛(其中$\delta>0$), 但在$(0,+\infty)$内不一致收敛.

§2 含参量反常积分

维尔斯特拉斯判别法:

$\left|f(x,y)\right| \le g(y)$, $\int_c^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y$收敛, 则$\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$

于$[a,b]$上一致收敛.

狄利克雷判别法:

1. $\left|\int_c^N f(x,y)\mathrm{d}y\right| \le M$ (对N一致);

2. 对每一 $x \in [a,b]$, $g(x,y)$关于$y\searrow$且$g(x,y)$关于x一致趋于0 $(y \to +\infty)$.

$\Rightarrow \int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$于$[a,b]$上一致收敛.

§2 含参量反常积分

阿贝尔判别法:

1. $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$于$[a,b]$上一致收敛;

2. 对每一$x\in[a,b]$, $g(x,y)$关于y单调且$g(x,y)$关于x一致有界.

$\Rightarrow \int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$于$[a,b]$上一致收敛.

§2 含参量反常积分

例:

1. $\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos xy}{1+x^2}\mathrm{d}x$于$(-\infty,+\infty)$上一致收敛;

2. $\int_0^{+\infty}e^{-xy}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$于$[0,d]$上一致收敛;

3. $f(x,y)$于$[a,b]\times[c,+\infty)$上连续,$\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$于$[a,b)$收敛

但于$x=b$处发散, 则$\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$于$[a,b)$上不一致收敛.

4. 求$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

§2 含参量反常积分

性质定理:

在一定条件下, 含参变量反常积分具有下列性质:

1. $F(x)=\int_{c}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y \in C[a,b].$

2. $\dfrac{d}{dx}\int_{c}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{c}^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y.$

3. $\int_{a}^{b} dx\int_{c}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{c}^{+\infty} dy\int_{a}^{b} f(x,y)\mathrm{d}x.$

4. $\int_{a}^{+\infty} dx\int_{c}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{c}^{+\infty} dy\int_{a}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x.$

§3 欧拉积分

Gamma函数:

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x,\ s>0.$$

Beta函数:

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x,\ p>0,q>0.$$

§3 欧拉积分

***Gamma*函数的性质：**

定义域：$s>0$;

连续性：$\Gamma(s)$于$s>0$处连续;

可微性：$\Gamma(s)$于$s>0$处任意阶可导;

递推性：$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$;

$$\Gamma(n+1)=n!;$$

其　他：　下凸, 正, 唯一极小点.

§3 欧拉积分

Beta函数的性质：

定义域：$p, q > 0$;

连续性：$B(p,q)$于$p, q > 0$处连续;

对称性：$B(p,q) = B(q,p)$;

递推性：当$p > 0, q > 1$时

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1).$$

§3 欧拉积分

练习:

$$1.\ B(m,1)=(\qquad\qquad);$$

$$2.\ B(m,n)=(\qquad\qquad)\cdot B(m,1);$$

$$\Rightarrow B(m,n)=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}.$$

第二十章 曲线积分

§1 第一型曲线积分：线密度

§2 第二型曲线积分：变力做工

§1 第一型曲线积分

光滑曲线:

设$AB: x=\phi(t), y=\varphi(t), t\in[\alpha,\beta]$.

$\phi'(t),\varphi'(t)$于$[\alpha,\beta]$连续且不同时为零.

光滑曲线的弧长:

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\phi'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2}\,dt.$$

§1 第一型曲线积分

光滑曲线的质量:

设光滑曲线$C(A,B)$的线密度为$f(x,y)$,

则其质量为

$$\int_{C(A,B)} f(x,y)\mathrm{d}s,$$

称其为$f(x,y)$沿曲线C的第一型曲线积分.

§1 第一型曲线积分

定理:

设光滑曲线$C(A,B): x=\phi(t), y=\varphi(t), t\in[\alpha,\beta]$,

$f(x,y)$于C连续,则

$$\int_{C(A,B)} f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(\phi(t),\varphi(t))\sqrt{\phi'(t)^2+\varphi'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

特别, 当$C(A,B): y=\phi(x), x\in[a,b]$时,

$$\int_{C(A,B)} f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,\phi(x))\sqrt{1+\phi'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

§1 第二型曲线积分

变力做功:

$\vec{F}=(P(x,y),Q(x,y))$,光滑有向曲线由$C(A,B)$.

$T: A=A_0, A_1, \cdots, A_n=B$,

$\forall(\xi_k,\eta_k)\in\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$

$$W\approx\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F(\xi_k,\eta_k)}\cdot\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$$

$$\to\int_{C(A,B)}P(x,y)\mathrm{d}x+\int_{C(A,B)}Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

§1 第二型曲线积分

定理:

$f(x,y)$于有向光滑曲线$C(A,B)$: $x=\phi(t), y=\varphi(t)$,

$t\in[\alpha,\beta]$,连续,且A,B分别对应参数α,β,则

$$\int_{C(A,B)} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t),\varphi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int_{C(A,B)} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta f(\phi(t),\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

§1 第二型曲线积分

推论:

$$C(A,B): y = f(x), a \le x \le b, f'(x) \in C[a,b],$$

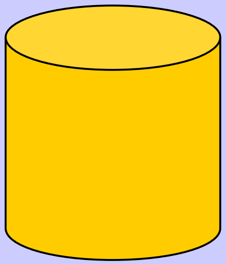
$$\int_{C(A,B)} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x, f(x))\mathrm{d}x,$$

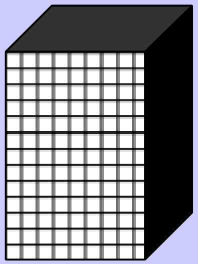
$$\int_{C(A,B)} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b f(x, f(x)) f'(x)\mathrm{d}x.$$

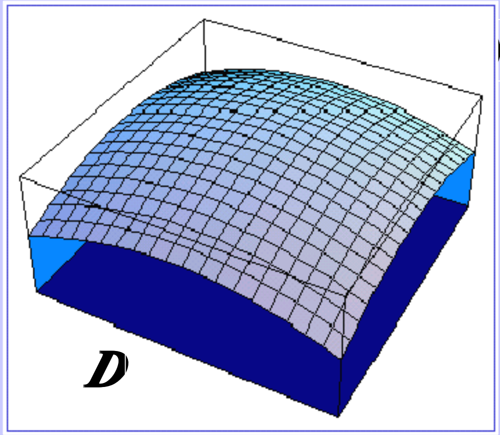
第二十一章 重积分

第二十一章　重积分

定　积　分：面积
二重积分：体积
三重积分：质量

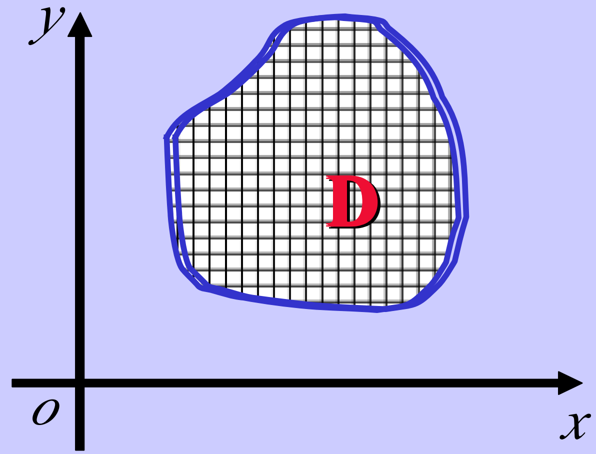






$z = f(x, y)$

§1 二重积分:概念与性质



$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\|T\|=\max\{d(\sigma_i)\}.$$

§1 二重积分：概念与性质

定理:

1. $f(x,y)$于$\boldsymbol{D}$可积$\Rightarrow f(x,y)$于$\boldsymbol{D}$有界；

2. $f(x,y)$于$\boldsymbol{D}$可积$\Leftrightarrow \lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i = 0.$

推论:

1. $f(x,y)$于$\boldsymbol{D}$连续$\Rightarrow f(x,y)$于$\boldsymbol{D}$可积；

2. $f(x,y)$于$\boldsymbol{D}$有界，间断点只分布在有限条光滑曲线上$\Rightarrow f(x,y)$于$\boldsymbol{D}$可积.

§ 1　二重积分：概念与性质

性质:

1. $f(x,y)\equiv k \Rightarrow \iint\limits_D f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = kS_D;$

2. $\iint\limits_D (f_1+f_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D f_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$

3. $\iint\limits_{D_1\cup D_2} f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$

4. $f_1 \le f_2 \Rightarrow \iint\limits_D f_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint\limits_D f_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$

5. $\left|\iint\limits_D f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le \iint\limits_D |f|\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$

§2 二重积分：计算

定理:

$f(x,y)$于矩形域$D[a\le x\le b, c\le y\le d]$可积, 且$\forall x\in[a,b]$,

$I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$存在, 则$\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$也存在, 且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x.$$

推论1:

$f(x,y)$于$D[a\le x\le b, c\le y\le d]$上连续, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\int_c^d[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x]\mathrm{d}y.$$

§2 二重积分：计算

推论2:

$f(x), g(y)$分别于$[a,b],[c,d]$上可积, 则

$$\iint\limits_{D} f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \int_c^d f(y)\mathrm{d}y.$$

推论3:

$D: x = a, x = b, y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$, 若$f(x,y)$于$D$可积,

且$\forall x \in [a,b], \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$存在, 则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

§2 二重积分：计算

例题:

1. 求 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \ D: x=2,\ y=x,\ xy=1.$

2. 求 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \ D: x=2a,\ (x-a)^2+y^2=a^2,\ y^2=2ax\ (y>0).$

3. $f\in C[a,b], f(x)>0,$ 则 $\iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ge (b-a)^2,$

   其中, $D: a\le x\le b,\ a\le y\le b.$

§3 二重积分：变量变换

定理:

$f(x,y)$于有界闭区域D连续, 做坐标变换:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \qquad \left(xy\text{平面区域}\boldsymbol{D} \leftrightarrow uv\text{平面区域}D' \right),$$

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0.\text{则},$$

$$\iint\limits_{\boldsymbol{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\boldsymbol{D}'} f\left[x(u,v),y(u,v)\right]\left|J(u,v)\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

§ 3　二重积分：变量变换

推论（极坐标变换）：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \left(xy\text{平面区域}\boldsymbol{D} \leftrightarrow r\theta\text{平面区域}\boldsymbol{D}'\right),$$

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

§3 二重积分：变量变换

例题:

1. 求由 $xy=a, xy=b, y^2=px, y^2=qx$ 所围区域D的面积.

2. 求 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$的面积.

3. 求底为$x^2+y^2\le a^2$, 顶为$z=e^{-(x^2+y^2)}$的曲顶柱体的体积.

4. 求椭球: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的体积.

5. 求球体$x^2+y^2+z^2\le a^2$被圆柱面$x^2+y^2=ax$所截得的那部分立体的体积.

§4 格林公式

定理:

$P(x,y),Q(x,y)$于闭区域D上连续, 且有连续的一阶偏导数, 则有

$$\iint_D (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

其中L的方向取正向.

$$\iint_D Q_x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L Q\mathrm{d}y;$$

$$-\iint_D P_y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x.$$

推论:

$$S_D = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

§4 格林公式

单连通区域:

区域D内任一封闭曲线所围成的区域只含有D中的点.

定理:

P, Q, P_y, Q_x在单连通区域D连续, 则下述等价:

1. $\int_{C(A,B)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$只与$A, B$有关;

2. 在D内存在函数$u(x,y)$, 使得 $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$;

3. $\forall (x,y) \in D, P_y = Q_x$;

4. 对任一全含于D内的闭曲线L: $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$.

§4 格林公式

定理:

若在单连通区域D内存在函数, 使得$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

而A,B是D内任意两点, 则

$$\int_{C(A,B)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y = u(B)-u(A).$$

推论:

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+u(x_0,y_0)$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y+u(x_0,y_0).$$

§5 三重积分：定义

V:有界闭体.

$T: V_1, V_2, \cdots, V_n;\ \Delta V_1, \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n$

$$\forall P_i \in V_i, \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$$

$$\|T\| = \max\{d(V_1), d(V_2), \cdots, d(V_n)\},$$

$$\lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot \Delta V_i = \iiint_V f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

§5 三重积分：计算

定理:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z;$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D'} \mathrm{d}x\mathrm{d}z\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\mathrm{d}y;$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D''} \mathrm{d}y\mathrm{d}z\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\mathrm{d}x.$$

§5 三重积分：变量变换

定理:

$f(x,y,z)$于有界闭体V上连续, 做坐标变换:

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \qquad \big(xyz\text{空间体}V \leftrightarrow uvw\text{空间体}V'\big),$$

$J(u,v,w) \neq 0.$ 则,

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_{V'} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\left|J(u,v,w)\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

§ 5 三重积分：变量变换

推论（柱面坐标变换）：

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$J(r,\varphi,z) = r.$$

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z.$$

§ 5 三重积分：变量变换

推论（球面坐标变换）：

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$J(r,\varphi,z) = r^2\sin\varphi.$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_{V'} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

§5 三重积分：变量变换

例题:

1. 求六平面 $a_i x+b_i y+c_i z=\pm h_i, i=1,2,3,$所围立体的体积

2. 求抛物面 $x^2+y^2=az\,(a>0)$,柱面$x^2+y^2=2ax$与平面$z=0$所围的体积.

3. 求$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$

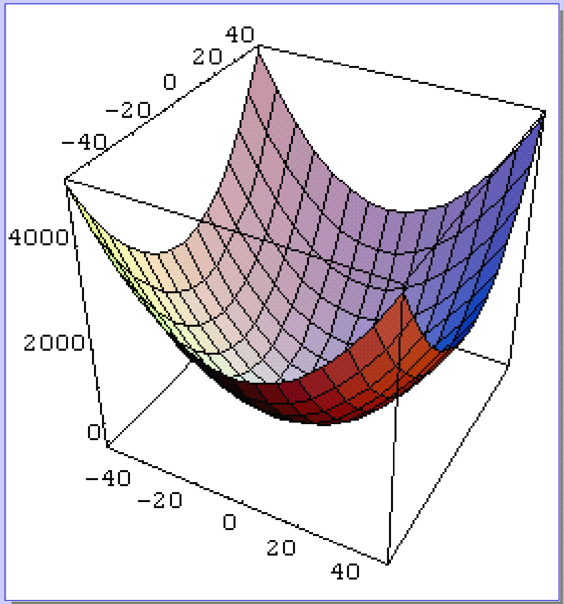
   V是由$x^2+y^2=z^2$与上半球面$x^2+y^2+z^2=R^2$所围成.

4. 求椭球体的体积.

第二十章　曲面积分

§1　第一型曲面积分：曲面块质量

§2　第二型曲面积分：流量计算



§1 第一型曲面积分

曲面的面积:

设曲面$S: x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v), (u,v)\in D.$

$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2, G=x_v^2+y_v^2+z_v^2,$

$F=x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v,$

$$\Rightarrow A_S=\iint_D \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

特别 $A_S=\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

§1 第一型曲面积分

光滑曲面块的质量:

$T: S_1, S_2, \cdots, S_n;$

$\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n;$

$$\forall (x_i, y_i, z_i) \in S_i,\ m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$$

$$\to \iint_S \rho(x, y, z)\mathrm{d}S.$$

§1 第一型曲面积分

定理:

设光滑曲面S: $x=x(u,v), y=y(u,v), \mathrm{z}=z(u,v), (u,v)\in D$,

$f(x,y,z)$于S连续,则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG\text{-}F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

特别,当曲面S:$\mathrm{z}=f(x,y)$时,

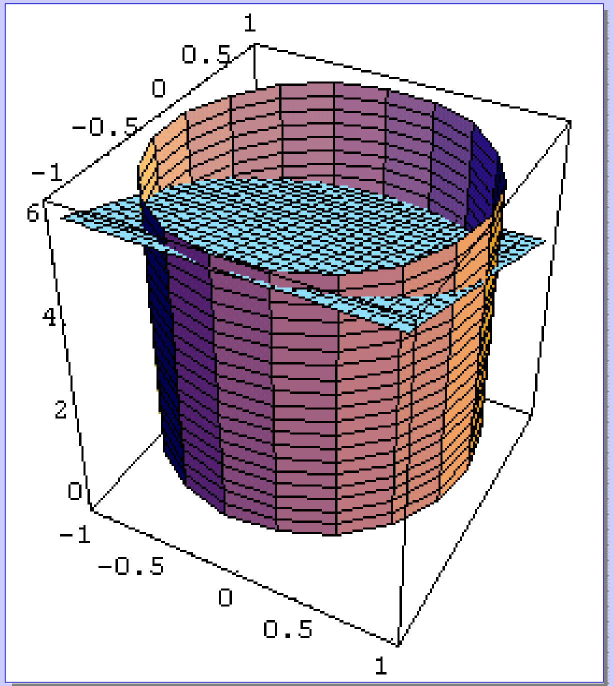
$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D f(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^{\ 2}+f_y^{\ 2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

§1 第一型曲面积分

例:

1. 计算 $\iint\limits_{S}(x+y+z)\mathrm{d}S$,

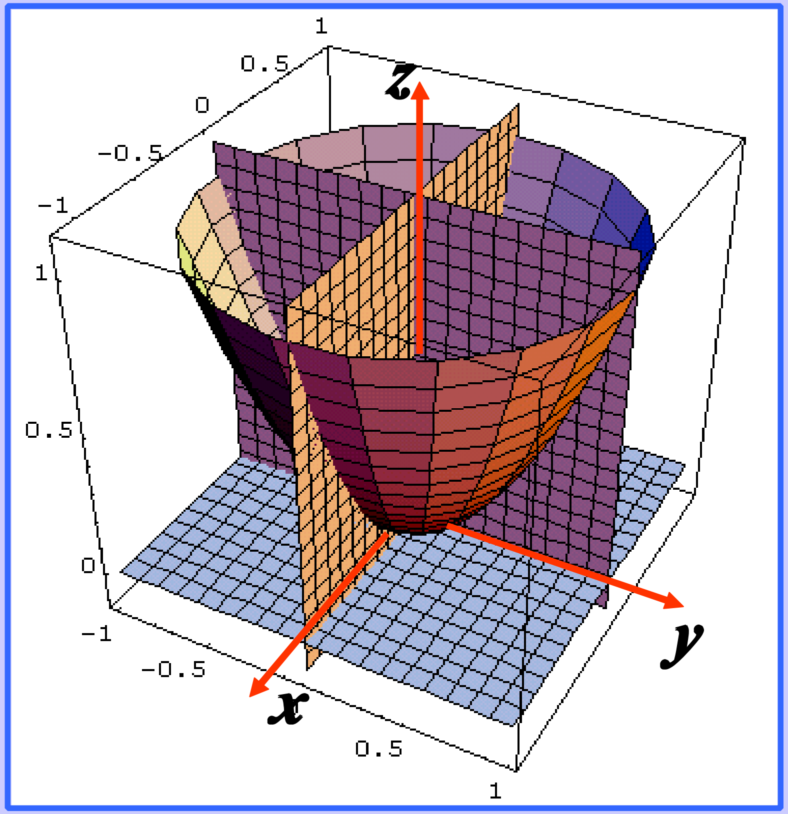
其中S为平面$y+z=5$被$x^2+y^2=25$所截的部分.



§1 第一型曲面积分

例:

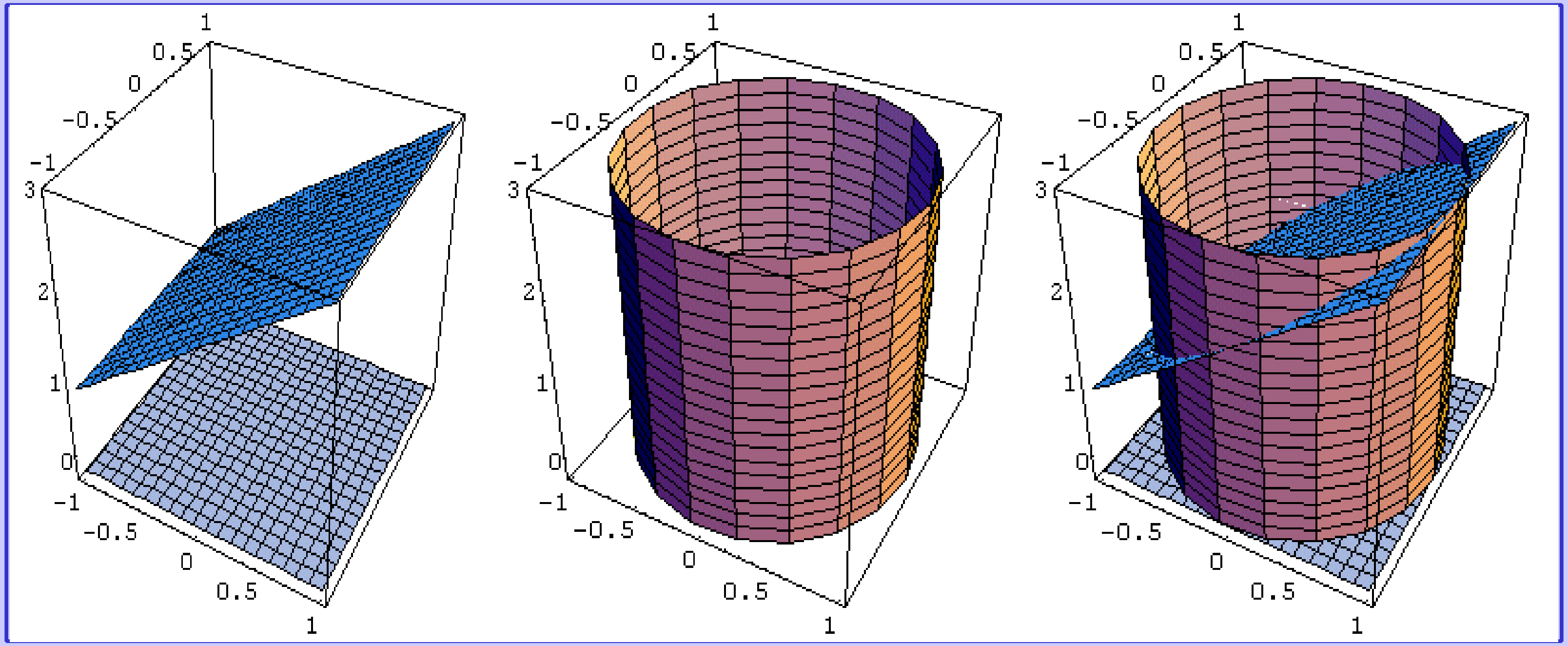
2. 计算 $\iint\limits_S |xyz|\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为抛物面 $z=x^2+y^2$ $(0\le z\le 1)$.



§1 第一型曲面积分

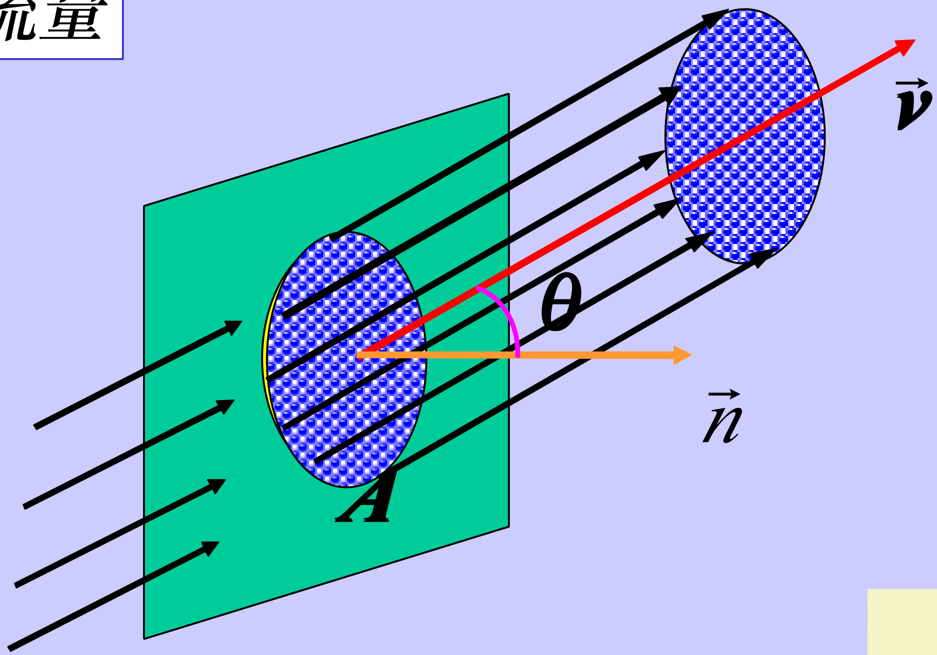
例:

3\. 计算$\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$为$x^2+y^2=1$, $z=x+2$, $z=0$所围空间立体的表面.



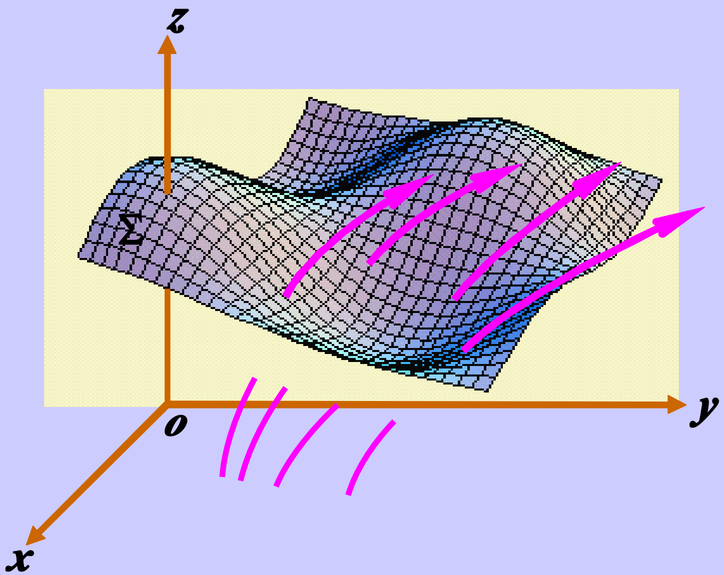
§2 第二型曲面积分

流量



流量

$$\Phi = A|\vec{v}|\cos\theta$$
$$= A\vec{v}\cdot\vec{n}$$



§2 第二型曲面积分

流量:

空间流速场$\vec{A}(P)=(A_x(P),A_y(P),A_z(P))$在单位时间内流过曲面$S$的流体的体积.

$T: S_1,S_2,\cdots,S_n;\ \Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n;\ P_k\in S_k$

$$Q=\sum_{k=1}^{n}\vec{A}(P_k)\cdot\overrightarrow{n_k}\cdot\Delta S_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(A_x(P_k),A_y(P_k),A_z(P_k))\cdot(\cos\alpha_k,\cos\beta_k,\cos\gamma_k)\cdot\Delta S_k$$

$$\approx\sum_{k=1}^{n}[A_x(P_k)\Delta y_k\Delta z_k+A_y(P_k)\Delta x_k\Delta z_k+A_x(P_k)\Delta x_k\Delta y_k]$$

$$\to\iint_S A_x(P)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+A_y(P)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+A_z(P)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

§2 第二型曲面积分

第二型曲面积分:

$$\iint\limits_{S_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad \iint\limits_{S_2} g(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad \iint\limits_{S_3} h(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

计算:

$$\iint\limits_{S_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint\limits_{D_1} f(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

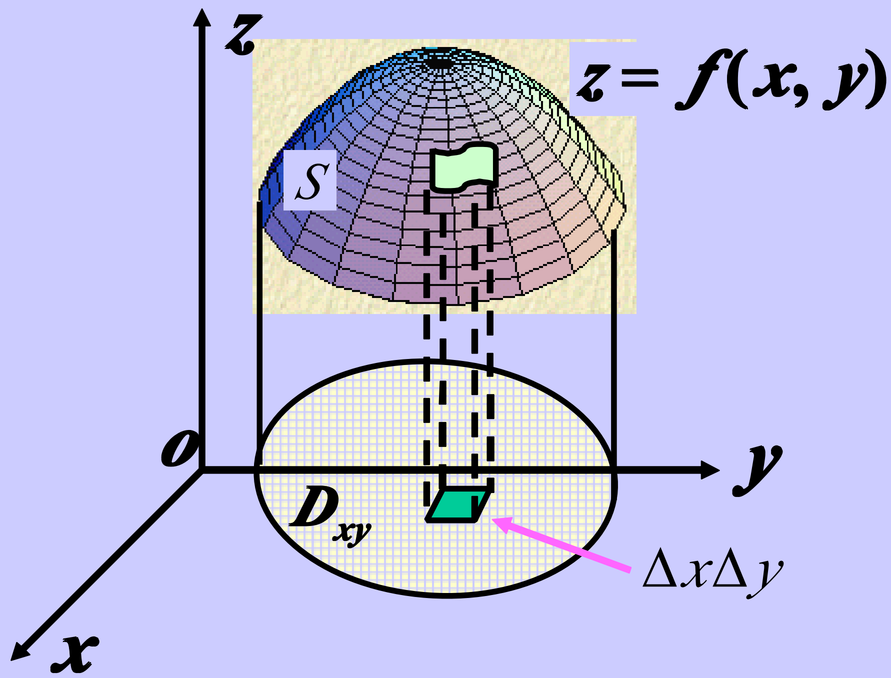
$$\iint\limits_{S_2} g(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint\limits_{D_2} g(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$\iint\limits_{S_3} h(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \pm\iint\limits_{D_3} h(x,y(x,z),z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

"±"号如何确定？

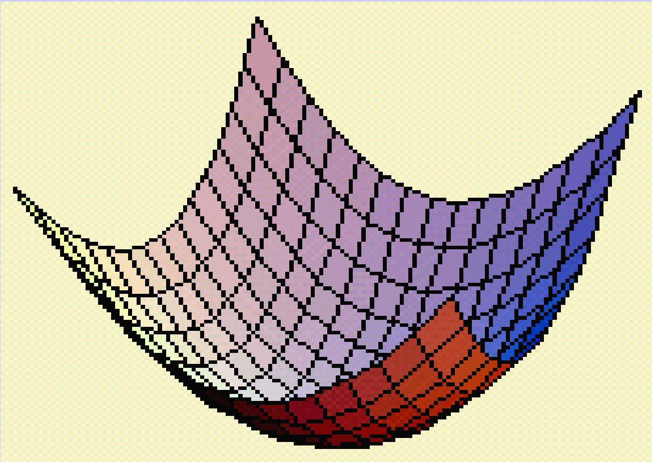
§2 第二型曲面积分

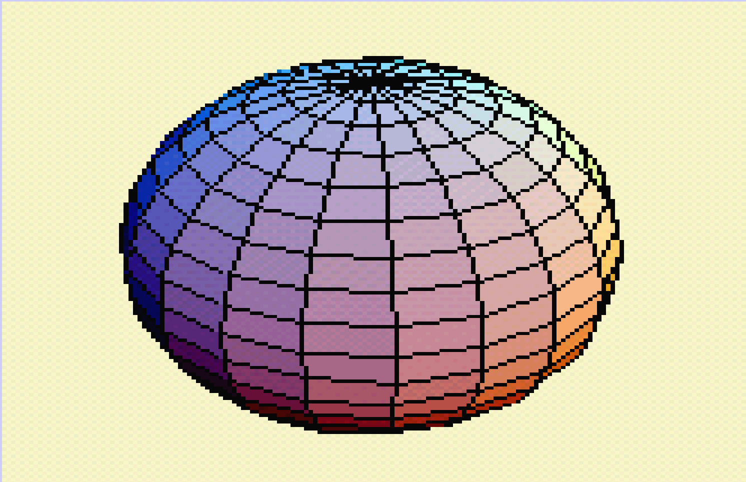
$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_D f(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

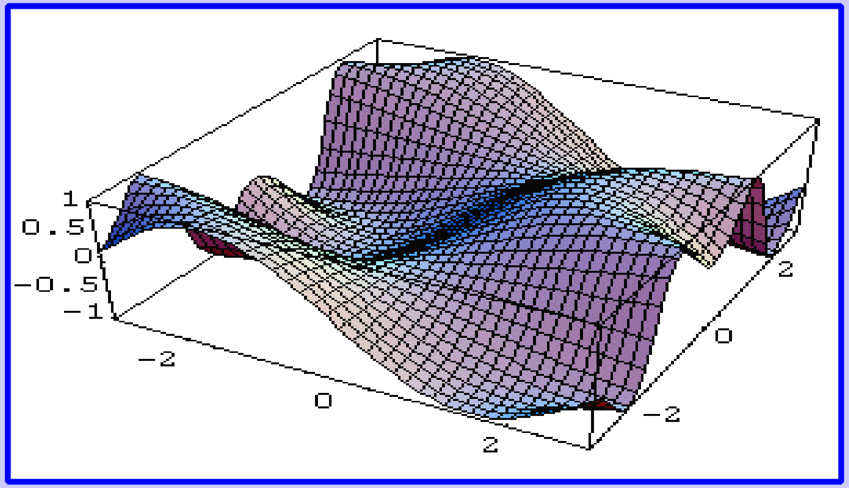


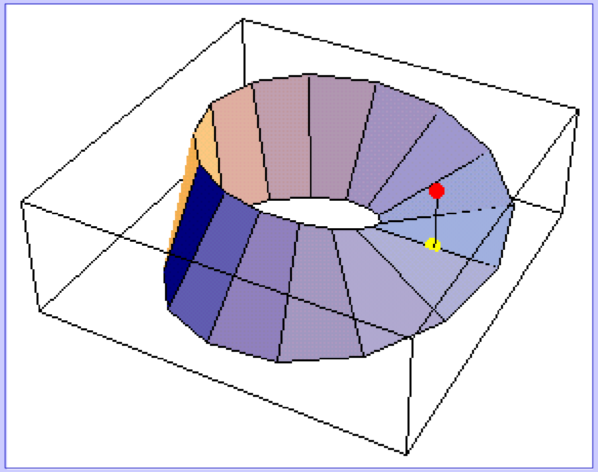
§2 第二型曲面积分

曲面的侧









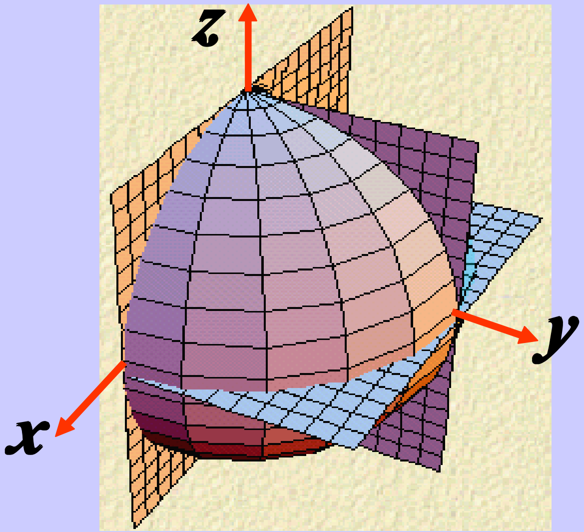
§2 第二型曲面积分

例题:

1. $\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ S: x^2+y^2+z^2=1\ (x\geq 0, y\geq 0, \mathrm{z}\geq 0)$,球面外侧为正.

2. $\iint\limits_S x^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ S: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (x\geq 0)$,外侧为正.

3. $\iint\limits_S (x+1)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ S:$ 四面体,外侧为正.



§ 3.1 高斯公式

定理:

P, Q, R, P_x, Q_y, R_z于有界闭体 V上连续, V的边界为光滑闭曲面 S, 则有

$$\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V (P_x + Q_y + R_z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 S的外侧为正侧.

推论:

1. $\displaystyle\oiint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z)\mathrm{d}S = \iiint_V (P_x + Q_y + R_z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$

2. $\displaystyle\overline{V} = \frac{1}{3}\oiint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

§ 3.2 斯托克斯公式

右手法则:

曲面的正侧与曲面边界曲线的方向构成右手系.

定理:

P,Q,R及其偏导数于光滑曲面块 S上连续, S的边界为光滑闭曲线 C, 则有

$$\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S (R_y-Q_z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(P_z-R_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(Q_x-P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

§3.3 例题

例题：

1. $\iint\limits_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$, S: $x^2+y^2=z^2$ $(0\leq z\leq h)$.

2. $\oint\limits_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, L是柱面$x^2+y^2=a^2$和$\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1$

$(a>0, h>0)$的交线（椭圆），从轴正向看去，椭圆按逆时针方向.

3. C是立方体$[0,a]\times[0,a]\times[0,a]$的表面与平面$x+y+z=\dfrac{3a}{2}$的交线，

求$\oint\limits_C (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$.

本学期知识要点

二阶偏导数、切平面、法线

隐函数求导

参变量积分求导

条件极值

第二型曲线积分、曲面积分（三大公式）

二、三重积分（极、柱面、球面）

原函数

结束了……

轻轻地
结束了
正如
轻轻地开始
挥挥手
带走一点点
西学的微积分